TR1 : Conduction thermique

L'étude thermodynamique des systèmes nous a instruit sur deux choses

- Le transfert thermique Q vers un système aura pour conséquence une variation d'énergie pour ce système, cela se traduit notamment par

$$\begin{cases} Q = \Delta U \text{ Pour une transformation isochore} \\ Q = \Delta H \text{ Pour une transformation isobare} \end{cases}$$

- Le second principe impose le sens du transfert thermique des zones de température les plus élevées vers les plus faibles.

On n'a pas contre aucune information sur la cinétique des échanges. Cette partie traitera de cette question.

1 Les différents transferts thermiques

Conduction (ou diffusion) thermique Il s'agit d'un transport d'énergie au travers d'un milieu matériel solide ou fluide.
A l'échelle microscopique, l'énergie est transmise par les chocs entre atomes ou molécules, les zones de températures élevées aynat une énergie plus importante vont la transmettre aux zones de températures plus faibles.

Convection thermique Le transfert est alors du à un déplacement macroscopique de la matière.
Cette convection sera naturelle si la matière est un gaz car le gradient de température entrainera ce phénomène de convection, mais on peut également créer la convection (à l'aide d'un ventilateur par exemple)

Rayonnement Nous recevons de l'énergie du soleil, et pourtant le vide nous sépare. Il existe donc un transport d'énergie à travers le vide, par l'intermédiaire d'un champ électromagnétique. On parlera alors d'émission thermique (par le soleil, une flamme ...)

Nous nous limiterons dans ce chapitre à l'étude de la conduction thermique.

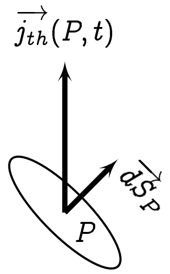
2 Modélisation de la conduction thermique

2.1 Flux thermique

Pour un transfert thermique à travers une surface Σ et pendant une durée élémentaire dt, le flux thermique est tel que

$$\delta Q = \Phi(t).dt$$

2.2 Vecteur densité de courant thermique



Vecteur densité volumique de courant thermique

Le vecteur $\overrightarrow{j_{th}}(P,t)$ est tel que le transfert thermique à travers une surface élémentaire $\overrightarrow{dS}_P$ en p, pendant la durée dt s'écrit

$$\delta^2 Q = \overrightarrow{j_{th}}(P,t).\overrightarrow{dS}_P.dt$$

Alors le flux thermique à travers une surface Σ s'écrit

$$\Phi(t) = \iint_{P\in\Sigma} \overrightarrow{j_{th}}(P,t).\overrightarrow{dS}_P$$

2.3 Relation entre cause et conséquence : Loi de Fourier

De manière empirique, on ressent que les phénomènes de transports vont être
- dans la direction du gradient de température
- d'autant plus intense que l'inhomogénéïté sera importante
- des zones les plus "chaudes" vers les moins "chaudes".

On peut donc énoncer une loi empirique :

La densité de courant thermique $\overrightarrow{j_{th}}$ est donnée par la loi de Fourier [1]

$$\overrightarrow{j_{th}}(P,t) = -\lambda.\overrightarrow{grad}\,(T(P,t))$$

avec λ la *conductivité thermique*, grandeur caractéristique milieu, exprimée en $W.m^{-1}.K^{-1}$

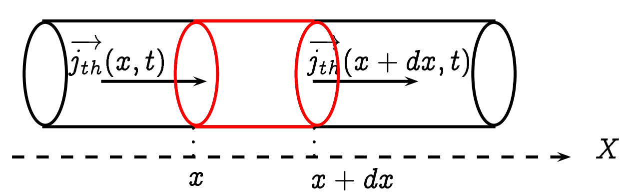
Exemple de valeur de λ, en S.I : Cuivre (399) ; Eau (0,597) ; Laine de verre (0,04) ; Air (0,03)

3 Conduction unidimensionnelle

3.1 Bilan Thermique local

On considère un milieu de capacité thermique massique à volume constant

$$c_{vm} \text{ avec } \begin{cases} v \text{ pour capacité à volume constant} \\ m \text{ pour la grandeur massique} \end{cases}$$



On traite le cas pour lequel $\overrightarrow{j_{th}}(P,t) = j_{th}(x,t).\overrightarrow{u_x}$

Choix du volume élémentaire

Les critères de choix sont les suivants :
- A l'intérieur de ce volume, tous les paramètres intensifs doivent être considérés comme uniformes.
  Ici : la température doit pouvoir être considérée comme identique en tout point
- Les vecteurs densité volumique de flux doivent être normaux aux surfaces délimitant le volume

1. Fourier : Scientifique de la fin du $XVIII^{me}$ siècle, qui formula l'équation de la chaleur et mis en place l'outil mathématique de sa résolution (les séries de Fourier)

– On choisira le volume élémentaire le plus grand possible vérifiant les conditions précédentes.
Ici, le cylindre de section S normale à l'axe et de hauteur dx vérifie ces conditions.

Energie reçue et perdue pendant dt On peut décomposer la surface entourant notre système en trois parties
– la base situé à l'abscisse x. Il y rentre pendant dt : $\delta Q_1 = \overrightarrow{j_{th}}(x,t).(dS.\overrightarrow{u_x}).dt$
– la base situé à l'abscisse $x+dx$. Il y sort pendant dt : $\delta Q_2 = \overrightarrow{j_{th}}(x+dx,t).\overrightarrow{u_x}.dS.dt$
– l'enveloppe pour laquelle $\overrightarrow{dS}$ est en tout point orthogonale au vecteur de courant : $\delta Q_3 = 0$
Il existe donc pendant dt un transfert thermique vers le système étudié

$$\delta Q_{ext\to\Sigma} = \delta Q_1 - \delta Q_2$$

$\delta Q_{entre} = (j_{th}(x,t) - j_{th}(x+dx,t)).dS.dt$
Or un développement limité à l'ordre 1 permet d'écrire $j_{th}(x+dx,t) \equiv j_{th}(x,t) + \dfrac{\partial j_{th}(x,t)}{\partial x}.dx$ ce qui amène à

$$\delta Q_{ext\to\Sigma} = -\frac{\partial j_{th}(x,t)}{\partial x}.dx.dS.dt$$

Production d'énergie pendant dt Pendant cette durée, le milieu a pu produire de l'énergie, notamment par effet Joule. On notera $\mathcal{P}_V$ la puissance volumique produite par le milieu (<0 s'il s'agit en fait d'absorption par le milieu).

L'énergie élémentaire produite par le milieu pendant une durée dt s'écrit

$$\delta Q_p = \iiint_{M\in V} \mathcal{P}_V(M,t).d\tau_M.dt$$

Dans le cas étudié où on choisit un dx très petit, on peut considérer la puissance volumique uniforme dans le volume du système. Ainsi $\delta Q_p = \mathcal{P}_V(M,t).dS.dx.dt$

Variation d'énergie pour le système pendant dt
Pendant cette durée dt, on peut également dire que la variation d'énergie interne dans le cylindre s'écrit

$$dU = [U(x,t+dt) - U(x,t)]$$

Soit avec un DL à l'ordre 1 : $dU = C\,[T(x+dx) - T(x)] \equiv \underbrace{\rho.c_{vm}.dS.dx}_{C}.\dfrac{\partial U(x,t)}{\partial t}dt$.

Bilan énergétique
Or d'après le premier principe, vu les hypothèses d'étude

$$dU = \delta Q_{tot}$$

$$dU = \rho.c_{vm}.\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}.dS.dx = -\frac{\partial j_{th}(x,t)}{\partial x}.dx.dS.dt + \mathcal{P}_V(M,t).S.dx.dt$$

$$\rho.c_{vm}.\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial j_{th}(x,t)}{\partial x} = \mathcal{P}_V(M,t)$$

La loi de la conservation locale de l'énergie s'écrit

$$\rho.c_{vm}.\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial j_{th}(x,t)}{\partial x} = \mathcal{P}_V(M,t)$$

> Ce qu'il faut retenir :
> L'équation obtenue correspond au cas particulier obtenu. Il faut retenir la méthode de réalisation d'un bilan local d'énergie.

3.2 Diffusion unidimentionnelle - Equation de la diffusion

On rappelle que

- La loi de Fourier $\overrightarrow{j_{th}}(M,t) = -\lambda.\overrightarrow{grad}\,(T(M,t))$
- La loi locale de conservation $\rho.c_{vm}.\dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} + \dfrac{\partial j_{th}(x,t)}{\partial x} = \mathcal{P}_V(M,t)$

Si $T(x,t)$ désigne la température en tout point $M(x,y,z)$ de l'espace, avec un vecteur courant thermique $\overrightarrow{j_{th}} = j_{th}(x,t)\overrightarrow{u_x}$, $T(x,t)$ vérifie à chaque instant et en tout point l'équation de la diffusion

$$\rho.c_{vm}.\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - \lambda.\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \mathcal{P}_V(M,t)$$

4 Conductance thermique

Nous verrons plus tard que l'analogie peut être faite entre les phénomènes de conduction thermique et électrique. On va donc chercher à définir, en régime permanent, la notion de conductance thermique, analogue à la conductance électrique.

On se place dans le cas d'un phénomène de conduction pure unidimentionnelle d'un barreau de longueur L de section S calorifugé latéralement, dont les extrémités sont maintenues aux température T_A et T_B

4.1 Définition

On peut travailler par analogies :

	Thermique	Electrique
Cause du phénomène	gradient de température	gradient de potentiel
Caractéristique	$\Phi = \dfrac{\delta Q}{dt}$	$I = \dfrac{dq}{dt}$
Résistance	$R_{th} = \dfrac{T_A - T_B}{\Phi}$	$R = \dfrac{V_A - V_B}{I}$

> Φ correspond pour la conduction thermique à la puissance
> Dans cette analogie, les flux Φ de transfert thermique et I de courant n'ont pas le même dimension. Il faudra donc veiller à se limiter à l'analogie sur la définition des résistances. Les bilans de puissance en conduction thermique ne pourront pas être traités par analogie avec les puissances électriques...

Les résistance et conductance thermique en régime permanent unidimensionnel d'un système maintenu entre deux températures T_A et T_B est telle que

$$R_{th} = \frac{1}{G_{th}} = \frac{T_A - T_B}{\Phi}$$

Application

Un mur de maison de surface $S = 25\ m^2$ a une diffusivité $\lambda = 0,1\ W.m^{-1}.K^{-1}$ et une épaisseur $e = 20\ cm$. Calculer sa résistance thermique si $T_{pice} = 25\ °C$ et $T_{ext} = 5\ °C$

- L'équation de la chaleur et la loi de Fourier donnent $j_{th} = \lambda\frac{T_A - T_B}{L}$, soit un flux à travers la section entière

$$\Phi = S.\lambda\frac{T_A - T_B}{L}$$

- La définition de la résistance thermique amène donc à

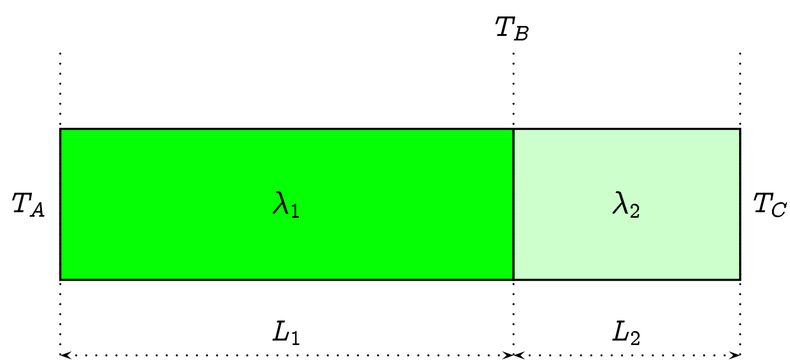
$$R_{th} = \frac{L}{\lambda S} \qquad R_{th} = 0,1\ W.K^{-1}$$

4.2 Associations de résistances thermiques

4.2.1 Association série

> En électricité, deux dipôles sont associés en série s'ils sont traversés par la même intensité, donc par le même *flux de charges*

On reprend donc cette définition dans le cadre de la conduction thermique



- On est en régime permanent donc $\vec{j} = \overrightarrow{C^{te}} \longrightarrow \Phi = C^{te}$ (car $S = C^{te}$)
- Pour chacun des barreaux on a donc $\begin{cases} R_{th1} = \dfrac{T_A - T_B}{\Phi} \\ R_{th2} = \dfrac{T_B - T_C}{\Phi} \end{cases}$
- On cherche un modèle de cette association, traversé par le même flux Φ et maintenu entre les mêmes températures extérieures T_A et T_C, soit

$$R_{eq} = \frac{T_A - T_C}{\Phi}$$

- Or on peut écrire que

$$R_{th1} + R_{th2} = \frac{T_A - T_B}{\Phi} + \frac{T_B - T_C}{\Phi} = \frac{T_A - T_B}{\Phi}$$
$$R_{eq} = R_{th1} + R_{th2}$$

Association série

Deux systèmes sont associés en série s'ils sont traversés par le même flux thermique. La résistance thermique de l'ensemble est alors la somme des résistances thermiques de chaque élément associé

$$R_{th(eq)} = \sum_i R_{thi}$$

Association parallèle

Deux systèmes sont associés en parallèle si leurs ectrémités sont aux mêmes températures.
La résistance thermique de l'ensemble vérifie alors la relation

$$\frac{1}{R_{th(eq)}} = \sum_i \frac{1}{R_{thi}}$$

Application

Quelle est la résistance thermique d'une fenètre de dimensions $L = 1,6\ m * l = 80\ cm$ constituée

- d'un simple vitrage d'épaisseur $2e$ ($e = 6\ mm$) et de conductivité thermique $\lambda_{verre} = 1,2\ SI$
- d'un double vitrage avec des verres d'épaisseur e et une lame d'air d'épaisseur $3e$, de conductivité thermique $\lambda_{air} = 2.10^{-2}\ SI$
- Par analogie électro-thermique, en déduire l'avantage énergétique des double vitrages.

- $R_1 = \frac{2e}{\lambda_{verre} S} = 5.10^{-3}\ SI$
- $R_2 = \frac{2e}{\lambda_{verre} S} + \frac{3e}{\lambda_{air} S} = 455.10^{-3}\ SI$
- En électricité, on a $\mathcal{P} = \frac{\Delta V^2}{R}$ donc de la même manière ici $\mathcal{P}_{th} = \frac{\Delta T^2}{R}$.
  Soumis aux mêmes différences de températures, on aura donc

$$\frac{\mathcal{P}_{double}}{\mathcal{P}_{simple}} = \frac{R_1}{R_2} = 0,01$$

  D'où l'intérêt des double vitrages...

5 Diffusion tridimentionnelle

5.1 Bilan énergétique

On reprend alors le bilan effectué dans le cas à une dimension On peut écrire la variation d'énergie contenue dans un volume V, entre les instants t et $t + dt$:

$$dU(t) = \iiint_{P \in V} \rho.c_{vm}.\left[T(P, t + dt) - T(P, t)\right].d\tau_P \equiv \iiint_{P \in V} \rho.c_{vm}.\frac{\partial T(P, t)}{\partial t}.dt.d\tau_P$$

D'autre part, les échanges thermiques se font à la surface Σ entourant le volume V

$$\delta Q_{transfert} = -\oint\!\!\oint_{M \in S} \overrightarrow{j_{th}}(M, t).\overrightarrow{dS}_M.dt$$

En utilisant le Théorème de Green-Ostrogradsky *(le flux étant bien calculé vers l'extérieur ici)*, on en déduit que

$$\delta Q_{transfert} = -\iiint_{P \in V} div\overrightarrow{j_{th}}(P, t).d\tau_P.dt$$

De plus le milieux peut produire une énergie correspondant à un apport pour le système

$$\delta Q_{produite} = \iiint_{P \in V} \mathcal{P}_v(P, t).d\tau_P.dt$$

On effectue alors un bilan d'énergie

$$dU = \delta Q_{transfert} + \delta Q_{produite}$$

$$\iiint_{P\in V} \rho.c_{vm}.\frac{\partial T(P,t)}{\partial t}.dt.d\tau_P = -\iiint_{P\in V} div\overrightarrow{j_{th}}(P,t).d\tau_P.dt + \iiint_{P\in V} \mathcal{P}_v(P,t).d\tau_P.dt$$

Cette équation devant être vérifié pour tout volume V, on en déduit la forme locale

$$\rho.c_{vm}.\frac{\partial T(P,t)}{\partial t} = -div\overrightarrow{j_{th}}(P,t) + \mathcal{P}_v(P,t)$$

5.2 Équation de la diffusion

On a donc $\begin{cases} \text{Loi de Fourier : } \overrightarrow{j_{th}}(P,t) = -\lambda.\overrightarrow{grad}\,(T(P,t)) \\ \text{Bilan énergétique : } \rho.c_{vm}.\dfrac{\partial T(P,t)}{\partial t} = -div\overrightarrow{j_{th}}(P,t) + \mathcal{P}_v(P,t) \end{cases}$

Or la définition du Laplacien scalaire permet d'écrire $div(\overrightarrow{grad}) = \Delta$

Pour une géométrie quelconque du système l'équation de la diffusion thermique s'écrit en un point P :

$$\rho.c_{vm}.\frac{\partial T(P,t)}{\partial t} = \lambda\Delta T(P,t) + \mathcal{P}_v(P,t)$$