Cahier de vacances

1 Inroduction

Durant les vacances d'été, je vous propose, si vous le souhaitez, de faire un tour d'horizon des méthodes et thèmes les plus classiques du programme de PCSI. Pour cela, voici une liste d'exercices. Ils sont regroupés par thèmes et corrigés. Les calculs y sont omniprésents sans être excessivement techniques. Il vous arrivera probablement de sécher sur l'un de ces exercices, aussi, avant d'abandonner, je vous conseille d'aller étudier la partie correspondante dans votre cours de première année (peut-être avez vous déjà traité un exercice très proche). Durant ces vacances, il est également important de se reposer et de lire les oeuvres qui figurent programme de français. Nous aurons l'occasion de reprendre ou d'approfondir certains de ces thèmes ensemble l'année prochaine. Voici l'adresse où vous pouvez me joindre si besoin :

seb.marcotte@yahoo.fr

2 Enoncés

2.1 Analyse

Exercice 1. (trigonométrie) On considère l'équation (E) et le polynôme P :

$$(E)\ \sin(4x) = \sin(x)\ \ ,\ \ P = 8X^3 - 4X - 1$$

a) Trouver les $x \in]0, \pi[$ solutions de (E).

b) Soit $x \in]0, \pi[$. Montrer que x est solution de $(E) \iff \cos(x)$ est racine de P.

c) En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{5})$.

Exercice 2. (fonctions trigonométriques inverse) Pour ut $x \in [0, 1]$, on pose :

$$f(x) = \arcsin(\sqrt{x})\ \ ,\ \ g(x) = \frac{1}{2}\arcsin(2x - 1)$$

a) Prouver que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$f(x) - g(x) = \frac{\pi}{4}$$

b) Retrouver le développement limité de arcsin en 0, a l'ordre 3.

c) En déduire que au voisinage de -1 :

$$\arcsin(u) = -\frac{\pi}{2} + \sqrt{2}\sqrt{1+u} + o(\sqrt{1+u})$$

Exercice 3. (fonctions ln) Soit a, b deux réels tels que $0 < a < b$, on pose pour tout $x, t > 0$:

$$f(x) = \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}\ \ ,\ \ g_x(t) = \frac{t}{(1+tx)\ln(1+tx)}$$

a) Déterminer le sens de variation de g_x sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que f est croissante sur $]0, +\infty[$.

c) Conclure que :

$$\ln(1+\frac{a}{b})\ln(1+\frac{b}{a}) \leq (\ln(2))^2$$

Exercice 4. (récurrence) Soit $n \geq 1$. Soit $x_1, \cdots, x_n$ des réels.

a) Montrer par récurrence que

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \prod_{i=1}^{k-1}(1 - x_i) = 1 - \prod_{j=1}^{n}(1 - x_j)$$

b) En déduire la relation :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{kk!}{n^k}\binom{n}{k} = n$$

Exercice 5. (somme téléscopique) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+4k+3}$$

a) Déterminer des réels a, b tels que :

$$\forall x \geq 0,\ \ \frac{1}{x^2+4x+3} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+3}$$

b) En déduire l'expression de S_n en fonction de n.

c) Calculer la limite de la suite (S_n).

Exercice 6. (développement limité, limite) Soit $a, b > 0$. On pose :

$$f(x) = (\frac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}}$$

a) Calculer la limite en $+\infty$ de f.

b) Effectuer le développement limité à l'ordre 1 en 0 de f.

c) En déduire que f est prolongeable par continuité en 0, et que ce prolongement est dérivable en 0.

Exercice 7. (théorème de la bijection, minimum) On pose :

$$f(x) = x + x^2 + 2x^3$$

a) Montrer que f est une bijection de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$.

b) Justifier l'existence d'un plus petit reél $\alpha > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbf{R}^*$,

$$|\frac{f^{-1}(y)}{y}| \geq \alpha$$

c) Dresser le tableau de variation de la fonction $x \mapsto 2\beta x^2 + \beta x + \beta - 1$, puis conclure que $\alpha = \frac{8}{7}$.

Exercice 8. (suite récurrente, accroissement finis) On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ tel que :

$$u_0 = 2,\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$$

a) Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est bien définie et $\forall n \geq 0,\ u_n > 1$.

b) Montrer que pour tout $x, y \in]1, +\infty[$:

$$|\sqrt{1+x} - \sqrt{1+y}| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}|x-y|$$

c) En déduire que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et trouver sa limite.

Exercice 9. (suites adjacentes, formules de Taylor) On considère les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ tel que :

$$\forall n \geq 0,\ u_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\ \ ,\ \ v_n = u_n + \frac{1}{(4n+4)!}$$

a) Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

b) Montrer que leur limite commune est un irrationnel.

c) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, prouver que cette limite est $\cos(1)$

Exercice 10. (dérivées successives, formule de Leibniz) On note f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

a) Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et qu'il existe une suite $(P_n)_{\geq 0}$ de polynômes telle que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N},\ \ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

b) Prouver la relation :

$$P_{n+1} + (2n+1)XP_n + n^2(1+X^2)P_{n-1} = 0$$

c) Que vaut $P_n(0)$?

Exercice 11. (équation différentielle, théorème fondamentale de l'analyse) ...

a) Calculer les intégrales :

$$C(x) = \int_0^x te^t\cos(t)dt\ \ ,\ \ S(x) = \int_0^x te^t\sin(t)dt$$

b) Déterminer la solution du problème de Cauchy :

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 1\ \ ,\ \ y(0) = 1, y'(0) = 2$$

c) En déduire toutes les fonctions f continues sur $\mathbf{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbf{R},\quad f(x) = 2\int_0^x \cos(x-t)f(t)dt + 1$$

Exercice 12. (équation différentielle, primitive, limite) On considère l'équation différentielle :

$$(E),\quad 2x(1-x)y'(x) + (1-x)y(x) = 1$$

a) Résoudre cette équation sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0,1[$, $]1,+\infty[$.

b) Montrer que (E) possède une seule solution sur $]-\infty, 1[$, expliciter cette solution.

c) Montrer que (E) ne possède pas de solution sur $]0, +\infty[$.

Exercice 13. (calcul d'intégrales) Soit $a_0, \cdots, a_n$ des réels, on pose :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx)$$

a) Calculer pour tout $(k,p) \in \mathbf{N}^2$:

$$I_{k,p} = \int_0^\pi \cos(kt)\cos(pt)dt$$

(On distinguera les cas $k=p=0$, $k=p\neq 0$, $k \neq p$)

b) En déduire la valeur de :

$$\int_0^\pi f(t)\cos(pt)dt$$

c) En déduire que

$$f = 0 \Longleftrightarrow \forall k \in \{0,\cdots,n\}\ \ a_k = 0$$

Exercice 14. (changement de variable, primitive, somme de Riemann) Soit $a > 1$. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$.

a) Démontrer que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)f(\sin(x))dx = \int_0^1 f(y)dy$$

b) En déduire la valeur de :

$$I_a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin^2(x) + a\cos^2(x)}dx$$

c) Que vaut la limite de la suite $(S_n)_{n\geq 0}$

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(\frac{k\pi}{2n})}{1+\cos^2(\frac{k\pi}{2n})}$$

Exercice 15. (intégration par parties, Cauchy-Schwarz) Soit f une fonction $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$. On pose :

$$I = \int_0^1 f''(t)^2 dt$$

a) A l'aide d'intégrations par parties, prouver que :

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{f(0)+f(1)}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 t(t-1)f''(t)dt$$

b) En déduire que

$$|\int_0^1 f(t)dt - \frac{f(0)+f(1)}{2}| \leq \frac{\sqrt{I}}{2\sqrt{30}}$$

c) Montrer que l'inégalité est optimale.

Exercice 16. (suite d'intégrales) On pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{e^x+1}dx$$

a) Calculer I_0 et I_1. On pourra commencer par trouver des réels a, b, c tels que :

$$\forall u > 0,\quad \frac{1}{u^2(1+u)} = \frac{a}{1+u} + \frac{b}{u} + \frac{c}{u^2}$$

b) Montrer que $(I_n)_{n\geq 0}$ est convergente et calculer sa limite.

c) Déterminer la limite de $(nI_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 17. (séries) On pose pour tout $N \geq 2$:

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(1-\frac{1}{n^2})\ ,\quad S_N = \sum_{n=2}^{N} \ln(1-\frac{1}{n^2})$$

a) Montrer que S est une série convergente.

b) Montrer que :

$$\forall N \geq 2,\quad e^{S_N} = \frac{N+1}{2N}$$

c) En déduire la valeur de S.

2.2 Algèbre

Exercice 18. (racines de l'unité, équations du second degré) Soit $a \in \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}^*$

a) Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbf{C}$: $z^2 - 2\cos(a)z + 1 = 0$.

b) Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbf{C}$: $z^n = e^{ia}$.

c) En déduire les solutions de l'équation : $z^{2n} - 2\cos(a)z^n + 1 = 0$.

Exercice 19. (théorème de Rolle,racines, formule de Taylor) Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme scindé à racines simples. On note $x_1, \cdots, x_n$ les racines de P et :

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

a) Montrer que P' est également scindé à racines simples.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{x_1, \cdots, x_n\}$

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - x_k}$$

c) En déduire que $\forall x \in \mathbf{R}$, $P(x)P''(x) \leq P(x)^2$, puis que

$$\forall k \in \{1, \cdots, n-1\} \;\; a_{k+1}a_{k-1} \leq a_k^2$$

Exercice 20. (espaces vectoriel, polynôme, base) Soit E l'ensemble des fonctions f $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \;\; x^2 f''(x) - 4xf'(x) + 6f(x) = 0$$

a) Montrer que E est un sous espace vectoriel de l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$.

b) Déterminer les solutions polynômiales de E.

c) Déterminer une base de E. On pourra poser

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$$

Exercice 21. (application linéaire, noyau, image, changement de base) Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer une base de $Ker(f - id)$ et de $Ker(f - 3id)^2$.

b) Montrer que $Ker(f - id)$ et $Ker(f - 3id)^2$ sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$, en déduire une base dans laquelle la matrice de f est :

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Calculer T^n puis A^n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 22. (matrices, applications linéaires) Soit $n \geq 1$. Soit f_n l'application linéaire de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbf{R}_n[X]$ qui à P associe $(X+1)P$. On note M_n la matrice de f_n relativement aux bases canoniques

a) Ecrire M_1, M_2, M_3.

b) Calculer le produit matriciel : $M_n M_{n-1} \cdots M_1$.

c) Calculer ${}^t M_n M_n$.

Exercice 23. (endomorphisme, rang, dimension) Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u = 0$

a) Montrer que $E = Ker(u) \oplus Ker(u^2 + id)$.

b) Montrer que $Ker(u^2 + id) = Im(u)$.

c) Montrer que $rg(u^2) = rg(u)$.

Exercice 24. (base, noyau, image) Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on pose :

$$f_k(x) = x^k e^{x+1} \;\; , \;\; E_k = Vect(f_0, \cdots, f_k)$$

a) Montrer que $(f_0, \cdots, f_k)$ est une base de E_k.

b) Montrer que l'application qui à ϕ_k définie sur E_k qui à f associe $f''' - 2f'' + f'$ est un endomorphisme de E_k et donner sa matrice dans cette base.

c) Pour quelles valeurs de k a -t-on $Ker(\phi_k) = Im(\phi_k)$?

Exercice 25. (déterminant) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}$, on pose :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} \cos(x) & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos(x) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos(x) & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos(x) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos(x) \end{vmatrix}$$

a) Calculer $D_n(x)$ pour $n = 1, 2, 3$. Proposer une conjecture quant à la valeur de $D_n(x)$.

b) Justifier la relation :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}, \quad D_{n+2}(x) = 2\cos(x)D_{n+1}(x) - D_n(x)$$

c) Démontrer votre conjecture.

Exercice 26. (produit scalaire, bases orthonormée, distance) On munit $\mathbf{R}_3[X]$ du produit scalaire :

$$< \sum_{k=0}^{3} a_k X^k, \sum_{k=0}^{3} b_k X^k >= \sum_{k=0}^{3} a_k b_k$$

On note :

$$H = \{P \in \mathbf{R}_3[X], \ \ P(1) = 0\}$$

a) Montrer que $< ., . >$ est effectivement un produit scalaire sur $\mathbf{R}_3[X]$.

b) Déterminer une base orthonormée de H.

c) Montrer que $H^\perp = Vect(A)$ où $A = X^3 + X^2 + X + 1$.

d) Calculer la distance de X à l'espace H.

2.3 Probabilités

Exercice 27. (formule des probabilités totales, formule de Bayes) Deux urnes A et B contiennent respectivement 6 boules et 5 boules noires d'une part, 4 blanches et 8 noires d'autre part. On pioche au hasard deux boules dans l'urne B que l'on transfère dans l'urne A. Puis on pioche une boule dans l'urne A. Calculer la probabilité que l'une au moins des deux boules transférées soit blanche sachant que la boule tirée était blanche.

Exercice 28. (formule des probabilités composées, indépendance) Un joueur lance deux dès non truqués. Il est considéré comme gagnant si la somme des deux dès donne 6, sinon il rejoue. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer la probabilité que le joueur gagne en moins de n coups.

Exercice 29. (variables aléatoires, espérance, couple) Soit $n \geq 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On y tire successivement et sans remise deux boules. On note X le plus grand des deux numéros obtenus. Déterminer la loi de la variable aléatoire X, puis son espérance.

Exercice 30. (variables aléatoires, indépendance) Soit $N \geq 2$. On tire au hasard un nombre entre 0 et N, et on recommence une infinité de fois. On considère les variables aléatoires $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$ définie par $X_1 = 1$ et pour $i \geq 2$, $X_i = 1$ si le numéro obtenu au tirage i n'est pas sorti dans les tirages précédents, 0 sinon. Pour $i \neq j$, les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes ?

3 Corrigés

....