Corrigé du Devoir Surveillé n°03 (sujet 1).

Problème (E3A PSI 2007).

Partie 1 : quelques calculs préliminaires.

1. Pour les deux premiers noyaux, il suffit de résoudre les systèmes correspondants :

   • ker(u + id) : on résout : $(A + I_3).X = 0$, ce qui donne : $X = y.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et : ker(u + id) = Vect((0,1,1)).

   • ker(u – 2.id) : on résout : $(A - 2.I_3).X = 0$, et : $X = x.\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où : ker(u – 2.id) = Vect((-1,1,1)).

   Pour $\ker((u + id)^2)$, on calcule la matrice de l'endomorphisme qui est : $(A + I_3)^2 = \begin{pmatrix} 9 & -9 & 9 \\ -9 & 9 & -9 \\ -9 & 9 & -9 \end{pmatrix}$, puis on résout le même système que précédemment, et : $\ker((u + id)^2)$ = Vect((0,1,1), (1,1,0)).
   On peut remarquer que cet espace contient ker(u + id), ce qui est normal.
2. En réunissant une base de chacun des deux espaces proposés, on vérifie sans difficulté que cela donne trois vecteurs et que la famille ainsi formée est libre.
   C'est donc bien une base de $\mathbb{C}^3$, et les sous-espaces vectoriels sont bien supplémentaires dans $\mathbb{C}^3$.
3. La question suggère fortement d'utiliser la décomposition précédente.
   On veut e_1, e_2, e_3 tels que : $u(e_1) = - e_1$, $u(e_2) = - e_2 + e_1$, $u(e_3) = 2.e_3$, soit :
   $(u + id_E)(e_1) = 0$, $(u + id_E)(e_2) = e_1$, et donc : $(u + id_E)^2(e_2) = 0$, puis : $(u - 2.id_E)(e_3) = 0$.
   On doit donc prendre e_3 dans ker(u – 2.id), e_2 dans $\ker((u+id)^2)$, et pas dans ker(u+id) et : $e_1 = (u+id)(e_2)$.
   On peut par exemple choisir : $e_2 = (1,1,0)$, puis : $e_1 = (u+id)(e_2) = (0,1,1)$, et : $e_3 = (-1,1,1)$.
   Alors (e_1, e_2) est une base de $\ker((u + id)^2)$, et e_3 une base de $\ker(u - 2.id_E)$.
   Donc (e_1, e_2, e_3) est bien une base de $\mathbb{C}^3$, et dans cette base $\mathscr{B}'$, la matrice de u est bien A'.
   Enfin, si on appelle P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ (qui est inversible), on a bien : $A' = P^{-1}.A.P$.

Partie 2 : quelques propriétés de la matrice J(0).

1. La matrice J(0) n'est pas de rang n puisque sa dernière colonne est nulle.
   Mais il est clair que ses (n – 1) premières colonnes forment une famille libre.
   Donc : rg(J(0)) = n – 1.
2. a. Comme suggéré, notons f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à J(0).
   Alors : $f(e_1) = e_2, \dots, f(e_{n-1}) = e_n$, et : $f(e_n) = 0$.
   Il est alors facile de montrer par récurrence que :
   $\forall k \in \mathbb{N}, k \le n-1, f^k(e_1) = e_{k+1}, f^k(e_2) = e_{k+2}, \dots, f^k(e_{n-k}) = e_n, f^k(e_{n-k+1}) = 0, \dots, f^k(e_n) = 0$.
   Donc la matrice $J(0)^k$ est la matrice construite sur le modèle de J(0), où la diagonale de 1 à été décalée vers le bas et commence, dans la première colonne, à la ligne (k+1).
   Puis, comme : $f^{n-1}(e_1) = e_n$, et : $\forall\, 2 \le j \le n, f^{n-1}(e_j) = 0$, on a ensuite : $f^n = 0$, en examinant à nouveau l'image des vecteurs de la base $\mathscr{B}$, puis : $\forall k \ge n, f^k = f^n o f^{k-n} = 0$, et : $(J(0))^k = 0$.

   b. Soit : $p \in \mathbb{N}^*$.
   Alors : $[(J(0))^p]^n = J(0)^{p.n} = (J(0)^n)^p = 0^p = 0$.
   Toutes les puissances non nulles de la matrice J(0) sont bien des matrices nilpotentes.
3. On commence par calculer $S_{n-1}(J(0))$:

$$S_{n-1}(J(0)) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{J(0)^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{1}{1!} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \frac{1}{2!} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{1}{(n-1)!} & \cdots & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 \end{pmatrix}$$, vu les différentes puissances de J(0).

   Puis : $\forall m \ge n$, $S_m(J(0)) = S_{n-1}(J(0))$, puisque toutes les matrices que l'on rajoute sont nulles.
   Donc toutes les suites coordonnées sont constantes à partir du rang (n – 1), elles convergent toutes et

$(S_m(J(0))$ converge vers $S_{n-1}(J(0))$.

Il est alors clair que : $U = \alpha(J(0)) - I_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{1}{1!} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \frac{1}{2!} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{1}{(n-1)!} & \cdots & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 0 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{J(0)^k}{k!}$.

4. Commençons par deux matrices nilpotentes A et B qui commutent, c'est-à-dire :
   $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists\ (p,q) \in \mathbb{N}^2$, $A^p = B^q = 0$, et : $A.B = B.A$.
   Pour : $\lambda \in \mathbb{C}$, on a déjà : $(\lambda.A)^p = \lambda^p.A^p = 0$.
   Puis : $(A + B)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} .A^k.B^{p+q-k}$, car la formule du binôme s'applique, les matrices commutant.
   Dans la somme, distinguons alors :
   - $0 \leq k \leq p$: on a alors : $p + q - k \geq q$, et : $B^{p+q-k} = 0$,
   - $p \leq k$, et : $A^k = 0$.

   Donc tous les termes de la somme sont nuls et la somme aussi, ce qui montre que (A+B) est nilpotente.
   On en déduit alors qu'une combinaison linéaire de A et de B est encore nilpotente et une combinaison linéaire de N matrices nilpotentes est encore nilpotente, par récurrence sur le nombre de matrices.
5. Puisque U est une combinaison linéaire de $(n-1)$ matrices nilpotente, elle est elle-même nilpotente.
   Par ailleurs, elle n'est pas de rang n puisque sa dernière colonne est nulle ; mais les $(n-1)$ premières colonnes forment clairement une famille libre donc : $rg(U) = n - 1$.

Partie 3 : quelques résultats sur les noyaux itérés d'un endomorphisme.

1. C'est presque immédiat puisque : $\forall\ (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\forall\ x \in \ker(u^i)$, $u^{i+j}(x) = u^j(u^i(x)) = u^j(0) = 0$, et : $x \in \ker(u^{i+j})$.
2. Les t_m sont des entiers et ils sont majorés par n.
   Donc l'ensemble $\{t_m, m \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble fini d'entiers comportant au plus (n+1) éléments.
   Donc $\{t_0, \ldots, t_n, t_{n+1}\}$ comporte aussi au plus (n+1) éléments et : $\exists\ 0 \leq i \neq j \leq n$, $t_i = t_j$.
   Donc $\inf\{m \in \mathbb{N}, t_m = t_{m+1}\}$ est non vide.
   Comme ensemble d'entiers naturels, non vide, il admet donc un plus petit élément et r existe.
3. On a, du fait de la définition de r :
   - $\forall\ m < r$, $t_m \neq t_{m+1}$, et avec la première question, $\ker(u^m)$ est strictement inclus dans $\ker(u^{m+1})$, puisque le premier est inclus dans le second, mais de dimension différente.
   - r est tel que : $t_r = t_{r+1}$, donc : $\dim(\ker(u^r)) = \dim(\ker(u^{r+1}))$.

   Mais là encore, la première question donne l'égalité de ces deux noyaux.
   - $\forall\ m > r$, $\forall\ x \in \ker(u^{m+1})$, $0 = u^{m+1}(x) = u^{r+1}(u^{m-r}(x))$ (l'écriture est possible car : $m - r \geq 0$).

   Donc : $u^{m-r}(x) \in \ker(u^{r+1}) = \ker(u^r)$, et donc : $u^r(u^{m-r}(x)) = 0 = u^m(x)$, soit encore : $x \in \ker(u^m)$.
   On a bien prouvé que : $\ker(u^{m+1}) \subset \ker(u^m)$, et la première question donne l'égalité.

Partie 4 : recherche des endomorphismes nilpotents de rang (n – 1).

1. Soient p et q deux entiers naturels et w la restriction de v^q à $\mathrm{Im}(v^p)$.
   a. Soit : $y \in \mathrm{Im}(w)$. Alors : $\exists\ x' \in \mathrm{Im}(v^p)$, $y = w(x')$, et : $\exists\ x \in E$, $x' = v^p(x)$, donc : $y = v^q(v^p(x)) = v^{p+q}(x)$.
      Donc : $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Im}(v^{p+q})$.
      Réciproquement : $\forall\ y \in \mathrm{Im}(v^{p+q})$, $\exists\ x \in E$, $y = v^{p+q}(x) = v^q(v^p(x))$, et en posant : $x' = v^p(x) \in \mathrm{Im}(v^p)$, on a :
      $y = v^q(x') = w(x')$, soit encore : $y \in \mathrm{Im}(w)$.
      Finalement : $\mathrm{Im}(w) = \mathrm{Im}(v^{p+q})$.
   b. Soit : $x \in \ker(w)$. Alors : $x \in \mathrm{Im}(v^p)$, et : $w(x) = 0 = v^q(x)$. Donc : $x \in \ker(v^q)$.
   c. On peut tout d'abord écrire : $\dim(\mathrm{Im}(v^p)) = \dim(\ker(w)) + \dim(\mathrm{Im}(w))$, puisque : $w \in \mathcal{L}(\mathrm{Im}(v^p))$.
      Puis :
      $\dim(\mathrm{Im}(w)) = \dim(\mathrm{Im}(v^{p+q})) = \dim(E) - \dim(\ker(v^{p+q}))$, car : $v^{p+q} \in \mathcal{L}(E)$, et :
      $\dim(\ker(w)) \leq \dim(\ker(v^q))$.
      Soit donc :
      $\dim(\ker(v^{p+q})) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(w)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(v^p)) + \dim(\ker(w)) \leq \dim(\ker(v^p)) + \dim(\ker(v^q))$,
      à nouveau avec le théorème du rang, appliqué cette fois à v^p.
   d. Comme V est de rang $(n-1)$, v est de rang $(n-1)$ et : $\dim(\ker(v)) = 1$.
      Mais de plus : $\forall\ 2 \leq i \leq n$, $\dim(\ker(v^i)) \leq \dim(\ker(v^{i-1})) + \dim(\ker(v)) = \dim(\ker(v^{i-1})) +1$.
      Donc il est immédiat par récurrence que : $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $\dim(\ker(v^i)) \leq i$.
   e. On sait de plus que : $\forall\ 1 \leq i \leq r$, $\dim(\ker(v^i)) > \dim(\ker(v^{i-1}))$, puisque les noyaux sont distincts jusqu'à r,

et elle est constante à partir de r, soit encore : $\dim(\ker(v^i)) \geq \dim(\ker(v^{i-1})) + 1$.
On a donc finalement : $\forall\ 1 \leq i \leq r$, $\dim(\ker(v^i)) = \dim(\ker(v^{i-1})) + 1 = i$, par récurrence immédiate.
D'autre part : $\dim(\ker(v^n)) = n$, puisque : $V^n = 0$, et donc : $\ker(v^n) = E$.
Donc si : $r < n$, l'égalité précédente ($\dim(\ker(v^n)) = n$) est impossible puisque la dimension des noyaux resterait alors bloquée à une valeur strictement inférieure à n.
Donc : $r = n$, et finalement, on a bien démontré qu'en fait : $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $\dim(\ker(v^i)) = i$.

2. Puisque : $\dim(\ker(v^{n-1})) = n - 1$, on a : $\ker(v^{n-1}) \neq E$, et : $v^{n-1} \neq 0$.
3. Soit alors e une vecteur de E tel que : $v^{n-1}(e) \neq 0$ (il en existe puisque : $v^{n-1} \neq 0$).
Montrons que la famille : $\mathscr{B}_1 = (e, v(e), v^2(e), \ldots, v^{n-1}(e))$, est libre, et pour cela partons de :
$\alpha_0.e + \ldots + \alpha_{n-1}.v^{n-1}(e) = 0$.
En prenant l'image par v^{n-1} de cette égalité, on obtient : $\alpha_0.v^{n-1}(e) = 0$, d'où : $\alpha_0 = 0$.
Et si on suppose avoir démontré que : $\forall\ 0 \leq i \leq k \leq n - 2$, $\alpha_i = 0$, alors : $\alpha_{k+1}.v^{k+1}(e) + \ldots + \alpha_{n-1}.v^{n-1}(e) = 0$, et en prenant l'image de cette égalité par v^{n-k-2}, on obtient : $\alpha_{k+1}.v^{n-1}(e) = 0$, soit : $\alpha_{k+1} = 0$.
Ceci démontre (par récurrence) que : $\forall\ 0 \leq i \leq n - 1$, $\alpha_i = 0$.
La famille proposée est donc libre, et comme elle comporte n éléments, c'est une base de E.
4. Chaque vecteur de la base $\mathscr{B}_1$ a pour image le suivant dans la base, sauf le dernier qui a pour image 0.
Donc la matrice s'écrit : $\mathrm{mat}(v,\mathscr{B}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = J(0)$.
5. Tout d'abord, si un endomorphisme u est nilpotent, puisque la suite des dimensions de ses noyaux itérés est strictement croissante jusqu'au rang i, alors : $\forall\ 0 \leq i \leq r$, $i \leq \dim(\ker(u^i)) \leq n$.
En particulier : $r \leq n$, et donc : $u^n = 0$.
L'étude précédente montre alors que si un endomorphisme u est nilpotent et de rang $(n - 1)$, alors on peut trouver un vecteur e dans E tel que $(e, u(e), \ldots, u^n(e))$ forme une base de E, et : $u^n(e) = 0$.
Réciproquement, si pour un endomorphisme u, on peut trouver un tel vecteur, il est clair que u est nilpotent de rang $(n - 1)$ puisque sa matrice dans la base indiquée est J(0).
De plus, si u et u' sont deux tels endomorphismes, alors en notant $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}'_1$ les bases de E construites sur le modèle précédent, A et A' les matrices représentatives de u et u' dans la base canonique $\mathscr{B}$, on a :
$J(0) = P^{-1}.A.P = P'^{-1}.A'.P'$, où P et P' sont les matrices de passages de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}'_1$ respectivement.
Finalement : $A = (P'.P^{-1})^{-1}.A'.(P'.P^{-1})$, et comme : $P'' = P'.P^{-1}$, est bien inversible, A et A' sont semblables.

Partie 5 : résolution de l'équation : $J(\mu) = \alpha(X)$, d'inconnue : $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Soit donc : $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $P \in Gl_n(\mathbb{C})$.
Alors : $\forall\ m \in \mathbb{N}$, $P^{-1}.S_m(M).P = S_m(P^{-1}.M.P)$, puisqu'on peut transformer sans problème ces sommes finies.
Or $(S_m(P^{-1}.M.P))$ tend vers $\alpha(P^{-1}.M.P)$, et $(S_m(M))$ tend vers $\alpha(M)$.
Mais comme de plus l'application $\psi : X \mapsto P^{-1}X.P$, de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même est continue car linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie, on en déduit que :
$$\lim_{m\to+\infty}(P^{-1}.S_m(M).P) = \lim_{m\to+\infty}\psi(S_m(M)) = \psi(\lim_{m\to+\infty}S_m(M)) = \psi(\alpha(M)) = P^{-1}.\alpha(M).P.$$
Finalement : $P^{-1}.\alpha(M).P = \alpha(P^{-1}.M.P)$
2. Posons : $z = x + i.y$, avec : $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
• la première équation donne : $e^z = e^x.(\cos(y) + i.\sin(y)) = i$, donc avec les modules : $e^x = 1$, soit : $x = 0$.
Puis $\cos(y) + i.\sin(y) = i$, conduit à : $y = \frac{\pi}{2} + 2.k.\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Les solutions sont donc : $z = i.(\frac{\pi}{2} + 2.k.\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
• pour la deuxième, on travaille sur le même modèle, et :
$x = 0$, $y = \pi + 2.k.\pi$, soit : $z = i.(\pi + 2.k.\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
• pour la troisième, toujours de la même façon :
$e^x = 5$, soit : $x = \ln(5)$, puis : $\cos(y) + i.\sin(y) = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}.i$, et en notant θ le réel de $[0,2.\pi[$ dont les sinus et cosinus valent respectivement $-\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{5}$, $y = \theta + 2.k.\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et enfin : $z = \ln(5) + i.(\theta + 2.k.\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Si : $\mu = 0$, il ne peut y avoir de solution puisque : $\forall z \in \mathbb{C}$, $z = x + i.y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|e^z| = e^x \neq 0$.
Si : $\mu \neq 0$, alors comme précédemment et en notant θ un argument de μ, on obtient :
$x = \ln(|\mu|)$, $y = \theta + 2.k.\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, soit : $z = \ln(|\mu|) + i.(\theta + 2.k.\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. a. On peut remarquer qu'un tel s existe, puisque : $\mu \neq 0$.
Puisque : $\forall\, 0 \leq m$, $S_m(s.I_n) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(s.I_n)^k}{k!} = \left[\sum_{k=0}^{m} \frac{s^k}{k!}\right].I_n$, la suite $(S_m(s.I_n))$ converge vers $e^s.I_n$, soit : $\mu.I_n$.
Donc : $\alpha(s.I_n) = \mu.I_n$.
b. Puisque les matrice $(s.I_n)$ de $J(0)$ commutent, on peut écrire :
$\alpha(J(s)) = \alpha(s.I_n).\alpha(J(0)) = \mu.\alpha(J(0))$.
c. La matrice proposée vaut en fait : $\mu.U$, (de la partie 2) et on a vu que U est nilpotente et de rang $(n - 1)$.
Donc la matrice : $V = \mu.[\alpha(J(0)) - I_n]$ est bien nilpotente, et de rang $(n - 1)$ puisque : $\mu \neq 0$.
d. En reprenant la notation précédente, on a donc : $\alpha(J(s)) = \mu.I_n + V$.
Or V étant une matrice nilpotente de rang $(n - 1)$, on peut alors trouver une matrice inversible Q telle que : $J(0) = Q^{-1}.V.Q$, et donc telle que : $\alpha(J(s)) = \mu.I_n + Q.J(0).Q^{-1} = Q.[\mu.I_n + J(0)].Q^{-1} = Q.J(\mu).Q^{-1}$.
Autrement dit : $\exists\, Q \in Gl_n(\mathbb{C})$, telle que : $Q^{-1}.\alpha(J(s)).Q = J(\mu)$.

5. Etant donné que : $Q^{-1}.\alpha(J(s)).Q = \alpha(Q^{-1}.J(s).Q)$, d'après la question 5.1, la matrice : $X_0 = Q^{-1}.J(s).Q$, est une solution de l'équation : $\alpha(X) = J(\mu)$.

6. Puisque de plus : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $S_m({}^tM) = {}^tS_m(M)$, en passant à la limite (avec des arguments identiques à ceux de la question 5.1), on obtient que : $\alpha({}^tM) = {}^t(\alpha(M))$.
Donc la matrice : $X'_0 = {}^t(Q^{-1}.J(s).Q)$, est solution de : $\alpha(X) = {}^tJ(\mu)$.

7. a. T est la transposée de : $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} = J(i)$, et une solution est donc par exemple : $X'_0 = {}^t(Q^{-1}.J(i.\frac{\pi}{2}).Q)$.
En calculant Q, en reprenant le principe de la partie 4, on trouve : $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, et : $X'_0 = \begin{pmatrix} i.\frac{\pi}{2} & -i \\ 0 & i.\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$.
b. De la même façon, on trouve : $B_1 = \begin{pmatrix} i.\pi & -1 \\ 0 & i.\pi \end{pmatrix}$.
Puis $\alpha(H)$ peut se calculer également par blocs, puisque : $\forall m \in \mathbb{N}$, $S_m(H) = \begin{pmatrix} S_m(B_1) & 0 \\ 0 & S_m((\ln(2))) \end{pmatrix}$, et lorsqu'on passe à la limite, on peut le faire de façon équivalente dans $S_m(H)$ ou dans les blocs.
Donc : $\alpha(H) = \begin{pmatrix} \alpha(B_1) & 0 \\ 0 & \alpha((\ln(2))) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ = A', et en notant : $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a :
$P.\alpha(H).P^{-1} = A$. Enfin : $X_2 = P.H.P^{-1} = \begin{pmatrix} \ln(2) & i.\pi - \ln(2) & i.\pi - \ln(2) \\ i.\pi - \ln(2) & -1 + \ln(2) & i.\pi + 1 - \ln(2) \\ i.\pi - \ln(2) & -i.\pi - 1 + \ln(2) & 2.i.\pi + 1 - \ln(2) \end{pmatrix}$, convient.