Devoir 10 - Corrigé

CCP PC 2010 - e3a PC 2007

Partie A Interférométrie à deux ondes

1 Le champ électromagnétique dans le vide

1.1.1 On repart des expressions énergétiques par exemple :

- $\mathcal{E}_e = \dfrac{1}{2}\epsilon_0.E^2.\mathcal{V} = \dfrac{1}{2}.C.U^2$ avec $\mathcal{V}$ un volume donc :

  ϵ_0 en $F.V^2.\left(V.m^{-1}\right)^{-2}.m^{-3}$ donc en $F.m^{-1}$

- $\mathcal{E}_m = \dfrac{1}{2.\mu_0}.B^2.\mathcal{V}\dfrac{1}{2}.L.i^2$ avec $B.L = \mu_0.i$ (Th d'ampère), soit μ_0 en $H.m^{-1}$

1.1.2 Équations de Maxwell : Cours...

1.2)
Équations de propagation et célérité : Cours...

2 L'onde progressive dans le vide

2.2.1 Solution en $\left(t - \dfrac{x}{c}\right)$: onde progressive se propageant selon Ox dans le sens des x croissants. On a $\overrightarrow{E}(M) = \overrightarrow{E}(x)$ donc $div\,\overrightarrow{E} = 0$ donne $\dfrac{\partial \overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{u_x}}{\partial x} = 0$.

2.2.2 Faire le calcul directement à partir de l'équation....

Pour l'onde étudiée, $\overrightarrow{B} = \dfrac{\overrightarrow{u_x}\wedge\overrightarrow{E}}{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{E_3}{c}cos\omega\left(t-\dfrac{x}{c}\right) \\ \dfrac{E_2}{c}cos\omega\left(t-\dfrac{x}{c}\right) \end{bmatrix}$

2.2.3 $\left\langle\overrightarrow{\Pi}\right\rangle = \dfrac{(E_2^2 + E_3^2}{2.\mu_0.c}.\overrightarrow{e_x}$

3 Superposition de deux ondes

3.1)
Les sources doivent être synchrones

3.2)
L'émission correspond à des dé-excitation d'électrons donnant des trains d'ondes émis à des instants aléatoires. Deux ondes issues de deux sources différentes n'émettrons donc pas de trains d'onde de manière synchrone.

3.3)
En pratique, on sépare un même faisceau lumineux en deux faisceaux ayant des chemins optiques différents avant d'interférer en M. On peut avoir une séparation d'amplitude (interféromètre de Michelson) ou du front d'onde (fentes d'Young).
La longueur des trains d'onde continuera à limiter les interférences.

4 Dispositif interférentiel

4.1)
Les chemins optiques pour les deux rayons passant par (M_1) et (M_2) entre S et Ω sont identiques, les vibrations sont donc en phse en Ω, les interférences seront alors constructives.

4.2)
4.2.1 Par définition, on a $\delta_1 = \mathcal{L}(M_1 - SP_2)_{\text{avec lame}} - \mathcal{L}(M_1 - SP_2)_{\text{sans lame}}$
La seule différence entre ces deux chemins optiques correspond à la au chemin optique au niveau de la lame : $\delta_1 = n.e - 1.e = (n-1).e$

4.2.2 D'après la loi de Descartes, en notant r l'angle entre le rayon réfracté et la normale au dioptre : $sin\theta = n.sinr$ et dans le cas de petits angles, $\theta \simeq n.r$.
Sans la lame, le chemin optique pour le rayon correspond à $A'H'$ alors qu'en présence de la lame il est égal à $n.A'B'$. On a donc $\delta_2 = n.A'B' - A'H'$. Or

$$A'B' = \frac{e}{cosr} = \frac{e}{1-\frac{r^2}{2}} \simeq e.\left(1+\frac{r^2}{2}\right)$$

$$A'H' = A'B'.cos(\theta - r) \simeq A'B'.\left(1-\frac{(\theta-r)^2}{2}\right)$$ *(inutile de développer la fonction cos ici...)*

Ce qui donne donc

$$\begin{aligned}\delta_2 &= A'B'.\left(n-1+\frac{\theta.\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}{2}\right)\\ &= e.\left(1+\frac{\theta^2}{2.n^2}\right).\left(n-1+\theta^2.\frac{n^2+1-2.n}{2.n^2}\right)\\ &= (n-1).e+e.\left(\frac{\theta^2}{2}-\frac{\theta^2}{2.n}\right)\end{aligned}$$

4.2.3 On a déterminé la différence de marche qu'impliquait chacune des lames par rapport au cas où elles ne sont pas présentes. Si on place les deux lames, la différence de chemin optique en Ω correspondra donc à $\delta_{tot} = \delta_2 - \delta_1$

$$\begin{aligned}\delta_{tot} &= (n-1).e+e.\left(\frac{\theta^2}{2}-\frac{\theta^2}{n^2}+\frac{\theta^2}{2.n}\right)-(n-1).e\\ &= e.\left(\frac{\theta^2}{2}-\frac{\theta^2}{2.n}\right) = \frac{e.\theta^2}{2}.\left(1-\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

On en déduit alors que $\boxed{\Phi = \frac{\pi.e.\theta^2}{\lambda}.\left(1-\frac{1}{n}\right)}$

L'éclairement en un point M de l'écran est fonction de Φ. Or Φ est indépendant des coordonnées du point M, l'éclairement est donc $\boxed{\text{uniforme}}$.
Il dépendra par contre de l'angle θ que l'on donnera à la lame.

4.3)

4.3.1 L'éclairement est maximal pour $\Phi = 2.\pi.k$, soit pour $2.\pi.k = \frac{\pi.e.\theta^2}{\lambda}.\left(1-\frac{1}{n}\right)$. Cela correspond à des valeurs d'inclinaison de la lame :

$$\boxed{\theta_k = \sqrt{\frac{2.k.\lambda.n}{e.(n-1)}}}$$

Application numérique : $\theta_1 = 6,16.10^{-2}\ rad = 3,53$.

4.3.2 On souhaiterait obtenir le premier ordre pour des valeurs très faibles d'inclinaison. Or l'ordre d'interférence dépend de $\theta_k.\sqrt{e}$. Si on diminue θ_k, il faut donc augmenter e.

4.3.3 La différence de marche entre les deux rayons ne doit pas dépasser la longueur de cohérence, soit,$l_c > \frac{e.\theta^2}{2}.\left(1-\frac{1}{n}\right)$, ce qui implique que :

$$e < \frac{l_c.2}{\left(1-\frac{1}{n}\right).\theta}$$

4.4)
L'éclairement nul correspond aux valeurs demi-entière de k, avec, d'après la question 4.3.1 :

$$\lambda_k = \frac{e.\theta^2}{2.k}.\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

Ce qui donne pour : $k=\frac{1}{2}$:$\lambda = 1265\ nm$; $k = \frac{3}{2}$:$\lambda = 421\ nm$; $k=\frac{5}{2}$:$\lambda = 253\ nm$
Une longueur d'onde sera donc absente. On obtient le blanc d'ordre supérieur.

5
5.1)
5.1.1 On a $\overrightarrow{grad}(n) = \frac{dn}{dy}.\overrightarrow{e_y} = -\gamma.\overrightarrow{e_y}$. Le gradient d'indice est donc orienté dans le sens $\boxed{\text{opposé à } \overrightarrow{e_y}}$

5.1.2 Par définition, $\delta_3 = \mathcal{L}(SP_1 - M_1)_{\text{avec lame}} - \mathcal{L}(SP_1 - M_1)_{\text{sans lame}} = (n' - 1).e$
On a donc $\boxed{\delta_3 = (n - \gamma.y - 1).e}$

5.1.3 On obtient suite au tracé que $\boxed{Y = y}$

5.1.4 Vu les chemins tracés, la différence de chemin optique ne provient que des lames, indépendamment de y, donc $\delta_{tot} = \delta_3 - \delta_1$
On a $\boxed{\delta_{tot} = -\gamma.y.e}$ Le gradient d'indice impose des symétries telles que la figure d'interférences correspondra à des franges rectilignes. Les franges brillantes sont telles que $\delta_{tot} = p.\lambda$ avec $p \in \mathcal{N}$. On définit alors l'interfrange par $i = |y_{p+1} - y_p| = \dfrac{\lambda}{\gamma.e} = 0,55\ \mu m$
Il faudrait agrandir cette figure d'interférence afin d'observer correctement les franges.

Deuxième partie Ondes élastiques dans un barreau solide

A Modèle microscopique et approximation des milieux continus

A1*a $F_n = K(u_{n-1} - u_n) + K(u_{n+1} - u_n)$

A1*b $\dfrac{d^2u_n}{dt^2} = \dfrac{K}{m}(u_{n+1} + u_{n-1} - 2.u_n)$ On pose pour la suite $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K}{m}}$

A2*a $-\omega^2\underline{u_n} = \omega^2.(\underline{u}_{n+1} + \underline{u}_{n-1} - 2.\underline{u}_n)$

A2*b Alors $\underline{u}_{n+1} = \underline{u}_{n-1} = \underline{u}_n$ soit :$\forall s u_n,\ \omega = 0$ (limite basse fréquence)

A2*c On a donc également $\underline{u}_{n+1} = -\underline{u}_n$ ce qui donne $-\omega^2\underline{u_n} = -4.\omega^2.\underline{u}_n$ soit $\omega = 2.\omega_0$.

A3*a Onde progressive selon les x croissants. Si $\underline{A}$ est indépendant de n, c'est qu'il n'y a pas d'amortissement de l'onde (ni amplification d'ailleurs)

A3*b On a alors $\underline{u}_{n+1} = \underline{u}_n.e^{-jka}$ et $\underline{u}_{n-1} = \underline{u}_n.e^{+jka}$ soit $\omega^2 = \omega_0^2[2 - 2.cos(ka)] = 4\omega_0^2.sin^2\dfrac{ka}{2}$ La pulsation étant positive, $\boxed{\omega = 2.\omega_0\left|sin\dfrac{ka}{2}\right|}$

A3*c Car la fonction de période $4.\pi.a$ est paire. Il suffit donc de l'étudier sur une demi-période.

A3*d Comme on l'a déjà vu, $\underline{u}_n = \underline{A}.e^{j(\omega t - k.n.a)} = \underline{A}.e^{j(\omega t - k.(n-1)n.a - k.a)}$ soit
$\underline{u}_n(t) = \underline{A}.e^{j(\omega(t\frac{k.a}{\omega}) - k.(n-1)n.a)} = \underline{u}_{n-1}(t - \tau)$
En posant $\tau = \dfrac{k.a}{\omega} = \dfrac{k.a}{2.\omega_0\left|sin\dfrac{ka}{2}\right|}$ On peut alors en déduire une vitesse de phase car l'onde s'est propagée d'une distance a pendant une durée τ, soit $\boxed{v_\varphi = \dfrac{a}{\tau} = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{2.\omega_0\left|sin\dfrac{ka}{2}\right|}{k}}$ La relation entre ω et k n'étant pas linéaire, le milieu est dispersif.

A4*a La vitesse de phase a été donnée ci-dessus. Par définition, on a $v_g = \dfrac{d\omega}{dk} = \omega_0.a.cos\dfrac{ka}{2}$

A4*b On a alors $v_\varphi \equiv v_g \equiv a.\omega_0$. Le milieu peut alors être considéré comme non dispersif.

A4*c Dans ce cas $v_g \rightarrow 0$: l'énergie ne peut plus se propager.

A5

$$\begin{cases} u(x+a,t) \equiv u(x,t) + \dfrac{\partial u}{\partial x}.a + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}.a^2 \\ u(x-a,t) \equiv u(x,t) - \dfrac{\partial u}{\partial x}.a + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}.a^2 \end{cases}$$ donc en considérant $u_n(t) = u(x,t)$, $u_{n-1}(t) = u(x-a,t)$ et $u_{n+1}(t) = u(x+a,t)$,

l'équation de propagation devient $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{K.a^2}{m}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

ce qui donne $\boxed{c = a\sqrt{\dfrac{K}{m}} = a.\omega_0}$ (on retrouve bien le cas non dispersif de l'étude précédente).

B Modèle macroscopique et module d'Young

B1

u correspondant à un déplacement et x une position, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ est sans dimension. Donc $E \equiv \dfrac{\text{Force}}{\text{Surface}} \equiv$ Pression.

On étudie une section (surface), donc considérée sans masse. Le pfd pour cette section donne donc $\overrightarrow{F_d} + \overrightarrow{F_g} = \overrightarrow{0}$.

B2

$dx' = u(x+dx,t) - u(x,t) + dx = dx\left(1 + \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$ ce qui donne $\boxed{\delta = \dfrac{dx'}{dx} - 1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}}$

B3

$\underbrace{\rho.S.dx}_{dm}.\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \underbrace{F_g(x,t)}_{-F_d(x,t)} + F_d(x+dx,t) = \dfrac{\partial F}{\partial x}.dx = E.S.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}.dx$ Ce qui donne $\boxed{c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}}$

C Liaison interatomique et module d'Young

C1*a On rappelle que la force dérive d'une énergie potentielle $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$

On en déduit que $F(r) = -2.\dfrac{\lambda}{r^3} + 10.\dfrac{\mu}{r^11}$

A l'équilibre $F(r) = 0$, soit $-2.\dfrac{\lambda}{r_0^3} + 10.\dfrac{\mu}{r_0^11} = 0$: $\boxed{r_0 = \left(\dfrac{5.\mu}{\lambda}\right)^{\frac{1}{8}}}$

C1*b AN :

C1*c Tracé :

C2

On note $r = r_0(1+\epsilon)$. Alors $F(r) = -2.\dfrac{\lambda}{r_0^3}(1-3.\epsilon) + 10.\dfrac{\mu}{r_0^11}(1-11.\epsilon)$

Sachant que $F(r_0) = 0$, il reste $F(r) = -\left[-6.\dfrac{\lambda}{r_0^3} + 110.\dfrac{\mu}{r_0^11}\right].\epsilon$

Or l'allongement pour le modèle du ressort correspond à $\Delta L = r - r_0 = r_0.\epsilon$, soit pour obtenir $F(r) = -K.\epsilon$ on pose $\boxed{K = \dfrac{1}{r_0}.\left[-6.\dfrac{\lambda}{r_0^3} + 110.\dfrac{\mu}{r_0^11}\right]}$

C3*a $a = r_0$

C3*b On a $1 + 8.\dfrac{1}{8} = 2$ atomes par maille. Donc $\rho = \dfrac{2.m}{a^3}$

C4*a On a donc $\sqrt{\dfrac{E}{\rho}} = \sqrt{\dfrac{K}{3.m}}.a$, ce qui donne $E = \dfrac{K.\rho.a^2}{3.m} = \dfrac{2.K}{3.a}$

C4*b Application numérique :