Fiche technique : résolution d'équations différentielles.

Principes généraux :

- toujours travailler sur un intervalle, et si plusieurs sont possibles, bien penser que l'étude se fait séparément sur chacun d'entre eux.

- toujours essayer (sauf dans certains cas bien spécifiques, précisés par exemple plus bas) de se placer dans les hypothèses d'une des formes du théorème de Cauchy-Lipschitz.

- dans le cas d'équations différentielles linéaires (ou de systèmes différentiels), se souvenir que :
  - lorsqu'elles sont homogènes, les solutions de ces équations forment toujours un espace vectoriel et il y a donc toujours la solution nulle.
  La dimension de cet espace n'est garantie a priori que si l'on se trouve dans les hypothèses de Cauchy-Lipschitz.
  - lorsque celles-ci sont avec second membre et dans les hypothèses de Cauchy-Lipschitz, les solutions de ces équations forment un espace affine dont la dimension est alors donnée par ce même théorème. Sinon, l'ensemble des solutions peut être vide.

- connaître également les diverses formes du théorème de Cauchy-Lipschitz donnant l'existence et l'unicité de solutions vérifiant des conditions initiales données.

- pour « recoller des solutions », dans le cas d'équations linéaires, il faut toujours préciser ce que l'on cherche et la plupart du temps, travailler par analyse-synthèse.

Techniques de résolution :

Equations différentielles linéaires scalaires du premier ordre :

- résoudre d'abord l'équation homogène sur un intervalle où le coefficient de y' ne s'annule pas,

- résoudre ensuite l'équation complète à l'aide par exemple de la méthode de variation de la constante.

exemple : $2.x.y'+y=\dfrac{1}{1+x}$: résolution sur $(-\infty,-1[$, $]-1,0[$ ou $]0,+\infty)$.

L'équation homogène a pour solutions : $y(x) = \dfrac{C_k}{\sqrt{|x|}}$, avec : $C_k \in \mathbb{R}$.

L'équation complète se résout à l'aide de la variation de la constante pour donner :

* $y(x) = \dfrac{\mathrm{Arc}\tan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}+\dfrac{C_1}{\sqrt{x}}$, sur $]0,+\infty)$,

* $y(x) = \dfrac{1}{2.\sqrt{-x}}.\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right)+\dfrac{C_k}{\sqrt{-x}}$, sur $(-\infty,-1[$ ou $]-1,0[$.

- lorsque l'équation est à coefficients constants pour la partie homogène et que le second membre est du type $e^{\alpha.x}.P(x)$, où P est un polynôme, soit : $a.y' + b.y = e^{\alpha.x}.P(x)$, alors on peut trouver une solution particulière de l'équation complète sous la forme :
  * $e^{\alpha.x}.Q(x)$, avec : $\deg(Q) = \deg(P)$, si α n'est pas racine de l'équation caractéristique : $a.r + b = 0$,
  * $e^{\alpha.x}.x.Q(x)$, avec : $\deg(Q) = \deg(P)$, si α est racine de l'équation caractéristique : $a.r + b = 0$.

exemple : $y' + y = 3.x.e^{2.x}$.

on cherche une solution sous la forme : $y(x) = (\alpha.x + \beta).e^{2.x}$, et on trouve : $y(x) = \left(x-\dfrac{1}{3}\right).e^{2.x}$.

exemple : $y' - y = (2.x + 1).e^{x}$.
on cherche une solution sous la forme : $y(x) = (\alpha.x + \beta).x.e^{x}$, et on trouve : $y(x) = (x^2 + x).e^{x}$.

• la technique précédente, toujours pour une équation à coefficients constants pour la partie homogène permet donc en particulier de traiter les seconds membres du type polynôme ($\alpha = 0$), et sh×polynôme, ch×polynôme, sinus×polynôme, cosinus×polynôme (en utilisant les exponentielles complexes, par exemple), à l'aide alors du principe de superposition décrit en dessous (voir l'exemple proposé).

exemple : $y' + 2.y = 4.x^2$.
on cherche une solution sous la forme : $y(x) = (\alpha.x^2 + \beta.x + \gamma)$, et on trouve : $y(x) = 2.x^2 - 2.x + 1$.

• la linéarité permet également d'utiliser le principe de superposition pour la recherche de solutions particulières de l'équation complète.
Plus précisément, si le second membre se présente sous la forme d'une somme, c'est-à-dire :
$a(x).y' + b(x).y = c_1(x) + c_2(x)$, on peut chercher une solution pour les deux équations :
$a(x).y' + b(x).y = c_k(x)$, avec : $k = 1, 2$, puis ajouter les deux solutions trouvées pour obtenir une solution de l'équation complète.

exemple : $y' + y = 2.x.\cos(x)$.
on résout les deux équations : $y' + y = x.e^{i.x}$, et : $y' + y = x.e^{-i.x}$, et on trouve globalement :
$y(x) = x.(\cos(x) - \sin(x)) - \sin(x)$.

exemple : $y' + y = 4.\mathrm{sh}(x)$.
on résout les deux équations : $y' + y = 2.e^x$, et : $y' + y = -2.e^{-x}$, et on trouve globalement :
$y(x) = e^x - 2.x.e^{-x}$.

Système différentiel linéaire d'ordre 1 à partie homogène constante :

• On travaille toujours sur des systèmes de type : $X' = A.X + B(t)$, avec : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in C^0(I,\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}))$.

• Résolution du système homogène :
On essaie de diagonaliser la matrice A ou à défaut de la trigonaliser.
Dans les deux cas, on écrit alors A sous la forme : $A = P.D.P^{-1}$, ou : $A = P.T.P^{-1}$.
Puis on pose une nouvelle fonction matricielle inconnue : $Y = P^{-1}.X$, et on constate que :
(X définie, continue et dérivable sur I) $\Leftrightarrow$ (Y définie, continue et dérivable sur I).
De plus dans ce cas, on a sur I : $Y' = P^{-1}.X'$, et le système devient : $Y' = D.Y$, ou : $Y' = T.Y$.
On résout alors ce système en Y (au besoin « en remontant les équations » si A n'est que trigonalisable), puis on revient à X par : $X = P.Y$.
Cette méthode ne nécessite donc pas le calcul de P^{-1}.

exemple : résoudre : $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 5x_2 \\ x_2' = x_1 - 3x_2 \end{cases}$.

On pose alors : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, et : $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

La matrice A est diagonalisable et : $A = P.D.P^{-1}$, où : $P = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et : $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, puis : $Y = P^{-1}.X$.

Alors le système est équivalent au nouveau système : $Y' = D.Y$, qui se résout en : $Y(t) = \begin{pmatrix} C_1.e^{-2.t} \\ C_2.e^{2.t} \end{pmatrix}$.

On obtient alors les solutions du système initial avec : $X = P.Y = C_1.\begin{pmatrix} e^{-2.t} \\ e^{-2.t} \end{pmatrix} + C_2.\begin{pmatrix} 5.e^{2.t} \\ e^{2.t} \end{pmatrix}$.

exemple : résoudre : $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = x_1 + 3x_2 \end{cases}$.

On pose de la même façon : X = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, et : A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

La matrice A n'est que trigonalisable et : A = P.T P^{-1}, avec : P = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, T = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, par exemple, et on pose ensuite : Y = P^{-1}.X.

Le système est alors équivalent au nouveau système : Y' = T.Y.

Ce dernier système se résout en commençant par le bas, puis en résolvant la première équation, qui est alors du premier ordre avec second membre, et on obtient : Y = $\begin{pmatrix} C_1.e^{2.t} - t.C_2.e^{2.t} \\ C_2.e^{2.t} \end{pmatrix}$.

On revient enfin à X par : X = P.Y, pour obtenir finalement : X = $C_1.\begin{pmatrix} e^{2.t} \\ -e^{2.t} \end{pmatrix} + C_2.\begin{pmatrix} -t.e^{2.t} \\ (t+1).e^{2.t} \end{pmatrix}$.

• Résolution du système avec second membre : méthode utilisant P^{-1}.
On peut travailler directement en incluant dès le départ le second membre dans la méthode précédente.
On résout alors, avec la nouvelle fonction matricielle Y : Y' = D.Y + P^{-1}.B(t), ou : Y' = T.Y + P^{-1}.B(t).

exemple : résoudre : $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 + e^{2t} \\ x_2' = x_1 + 3x_2 + t \end{cases}$.

La matrice A n'est que trigonalisable, et : A = P.T.P^{-1}, avec : P = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, T = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On calcule : P^{-1} = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et le système de départ (complet) devient alors : Y' = T.Y + $\begin{pmatrix} e^{2.t} \\ e^{2.t} + e^{t} \end{pmatrix}$.

Le système se résout là encore en commençant par le bas, pour obtenir :

Y = $\begin{pmatrix} C_1.e^{2.t} - C_2.t.e^{2.t} + \left(t - \dfrac{t^2}{2}\right).e^{2.t} - e^{t} \\ C_2.e^{2.t} + t.e^{2.t}e - e^{t} \end{pmatrix}$, et finalement X par : X = P.Y.

Au final, les solutions du système de départ se présentent bien sous la forme : X = X_0 + C_1.X_1 + C_2.X_2.

• Résolution du système avec second membre : méthode de variation des constantes.
Si l'on connaît une base (X_1, X_2) de l'espace des solutions sur ℝ du système homogène associé, on cherche alors une solution du système complet sous la forme : X = C_1.X_1 + C_2.X_2, où C_1 et C_2 sont des fonctions inconnues, supposées deux fois dérivables sur I.

On est alors amené à résoudre : $\begin{cases} C_1'.x_{1,1} + C_2'.x_{1,2} & = & b_1(t) \\ C_1'.x_{2,1} + C_2'.x_{2,2} & = & b_2(t) \end{cases}$.

exemple : résoudre : $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 5x_2 + t \\ x_2' = x_1 - 3x_2 + 1 \end{cases}$.

La matrice A du système est diagonalisable, et une base de l'espace des solutions sur ℝ du système homogène associé est donnée par : $X_1(t) = \begin{pmatrix} e^{-2.t} \\ e^{2.t} \end{pmatrix}$, et : $X_2(t) = \begin{pmatrix} 5.e^{2.t} \\ e^{2.t} \end{pmatrix}$.

Pour trouver une solution particulière du système complet, on pose alors : X = C_1.X_1 + C_2.X_2, et on est amené à résoudre : $\begin{cases} C_1'.e^{-2.t} + 5.C_2'.e^{2.t} & = & t \\ C_1'.e^{-2.t} + C_2'..e^{2.t} & = & 1 \end{cases}$.

D'où : $C'_2(t)$ = $\dfrac{t-1}{4}.e^{-2.t}$, soit : $C_2(t)$ = $\dfrac{1-2.t}{16}.e^{-2.t}$, et : $C'_1(t)$ = $\dfrac{5-t}{4}.e^{2.t}$, soit : $C_1(t)$ = $\dfrac{11-2.t}{16}.e^{2.t}$.

On obtient ainsi comme solution particulière : $X(t) = C_1(t).X_1(t) + C_2(t).X_2(t) = \frac{1}{4}.\begin{pmatrix} 4-3.t \\ 3-t \end{pmatrix}$,

sachant que les solutions du système général sont les fonctions définies sur ℝ par :
$X(t) = X_0(t) + C_1.X_1(t) + C_2.X_2(t)$, avec : $(C_1,C_2) \in \mathbb{R}^2$.

Equations différentielles linéaires scalaires homogènes du second ordre :

• il n'y a pas de technique générale pour ces équations différentielles.

• dans le cas d'équations différentielles homogènes **à coefficients constants**, on peut passer par l'équation caractéristique attachée à cette équation différentielle, ce qui correspond à la recherche de solutions en exponentielles.
Plus précisément, si l'équation est : $a.y'' + b.y' + c.y = 0$, l'équation caractéristique est : $a.r^2 + b.r + c = 0$.

exemple : $y'' - 3.y' + 2.y = 0$,
l'équation caractéristique associée est : $r^2 - 3.r + 2 = 0$, et admet deux racines simples 1 et 2.
les solutions sur tout intervalle I de ℝ (qui forment un ℝ-espace vectoriel de dimension 2) sont alors :
$y(x) = C_1.e^{1.x} + C_2.e^{2.x}$.

exemple : $y'' - 2.y' + y = 0$,
l'équation caractéristique associée est : $r^2 - 2.r + 1 = 0$, et admet une racine double 1.
les solutions sur tout intervalle I de ℝ (qui forment un ℝ-espace vectoriel de dimension 2) sont alors :
$y(x) = C_1.e^{1.x} + C_2.x.e^{1.x}$.

exemple : $y'' - 2.y' + 2.y = 0$,
l'équation caractéristique associée est : $r^2 - 2.r + 2 = 0$, et admet deux racines complexes conjuguées $1 \pm i = \alpha \pm i.\beta$.
Dans le cas de fonctions à valeurs complexes, il y a donc deux racines simples et on termine comme dans le premier exemple précédent.
Dans le cas de fonctions à valeurs réelles, les solutions sur tout intervalle I de ℝ (qui forment toujours un ℝ-espace vectoriel de dimension 2) sont alors :
$y(x) = e^{1.x}.(C_1.\cos(1.x) + C_2.\sin(1.x))$, ou dans le cas général :
$y(x) = a^{\alpha.x}.(C_1.\cos(\beta.x) + C_2.\sin(\beta.x))$.

• lorsque l'on connaît une solution u ne s'annulant pas sur l'intervalle d'étude I, on peut obtenir une deuxième solution de l'équation, indépendante de la première, en posant : $y = u.z$, où z est une nouvelle fonction inconnue, supposée définie et deux fois dérivable sur I.
Après remplacement dans l'équation de départ, on aboutit à une équation différentielle du second ordre en z' mais sans terme en z, autrement dit à une équation différentielle du premier ordre en z'.

exemple : $x^2.(1 - x).y'' - x.(1 + x).y' + y = 0$.

En utilisant des séries entières (voir plus bas), on constate que: $y(x) = \frac{x}{x-1}$, est solution sur tout intervalle I de ℝ, évitant 0 et 1.

On pose alors : $\forall x \in I$, $y(x) = \frac{x}{x-1}.z(x)$, où z est une nouvelle fonction inconnue définie sur I.

Puisque de même, on a : $z(x) = \frac{x-1}{x}.y(x)$, on a alors l'équivalence :
(y deux fois dérivable sur I) ⇔ (z deux fois dérivable sur I).
On remplace ensuite y par z dans l'équation initiale, grâce à :
$\forall x \in I$, $y'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}.z(x) + \frac{x}{x-1}.z'(x)$, et : $y''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}.z(x) - \frac{2}{(x-1)^2}.z'(x) + \frac{x}{x-1}z''(x)$.
L'équation se transforme alors, après simplifications, en : $x.z''(x) + z'(x) = 0$.

Les solutions sont alors : $z'(x) = \frac{C_1}{x}$, $C_1 \in \mathbb{R}$, puis : $z(x) = C_1.\ln(|x|) + C_2$, avec : $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$, et finalement : y(x) = $C_1.\dfrac{x}{x-1} + C_2.\dfrac{x.\ln(|x|)}{x-1}$, avec : $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

Recherche d'une solution particulière d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre avec second membre :

• on peut utiliser, toujours grâce à la linéarité, le principe de superposition décrit dans le paragraphe précédent.

exemple : voir l'exemple qui suit.

• l'équation est à coefficients constants pour la partie homogène et le second membre est du type $e^{\alpha.x}.P(x)$, où P est un polynôme.
On note (E) l'équation caractéristique associée, soit : $a.r^2 + b.r + c = 0$.
Alors on peut trouver une solution particulière de l'équation complète sous la forme :
$e^{\alpha.x}.x^{\mu}.Q(x)$, avec : deg(Q) = deg(P), et μ est la multiplicité de α comme racine de (E) (donc : μ = 0, 1, ou 2, suivant que α n'est pas racine, ou racine simple ou double de (E)).

exemple : y'' + 2.y' + y = 8.ch(x),
on résout dans ce cas les deux équations : $y'' + 2.y + y = 4.e^x$, et : $y'' + 2.y' + y = 4.e^{-x}$.
La première équation correspond à un second membre en : $e^{\alpha.x}.P(x)$, où :
P(x) = 1, α = 1, qui n'est pas racine de l'équation caractéristique associée.
On chercher donc alors une solution sous la forme : $y(x) = e^{1.x}.Q(x)$, avec : deg(Q) = deg(P), et on peut donc poser : Q(x) = a.
On trouve alors : $y(x) = 1.e^x$.
On résout ensuite la deuxième équation en cherchant cette fois une solution sous la forme : $e^{-x}.Q(x).x^2$, puisque ici : α = -1, est racine double de l'équation caractéristique, et encore : deg(Q) = deg(P).
En remplaçant alors à nouveau Q(x) par une constante a, on trouve : $y(x) = 2.x^2.e^{-x}$.
Globalement on peut enfin proposer comme solution particulière de l'équation complète :
$y(x) = e^x + 2.x^2.e^{-x}$, que l'on peut pour terminer au besoin retransformer en ch et sh.

• si l'on se trouve dans les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, et si on connaît une base de l'espace des solutions de l'équation homogène associée, on peut aussi utiliser la méthode de variation des constantes.

exemple : y'' – 4.y' + 3.y = $\dfrac{2.x+1}{x^2}.e^x$.
Les solutions de l'équation homogène sont : $y(x) = C_1.e^x + C_3.e^{3.x}$.
On cherche alors une solution sous la forme: $y(x) = C_1(x).e^x + C_3(x).e^{3.x}$, avec C_1 et C_3 des fonctions inconnues, supposées deux fois dérivables sur (-∞,0[ou]0,+∞).
On est alors amené à résoudre le système :
$$\begin{cases} C_1'(x).e^x + C_3'(x).e^{3.x} = 0 \\ C_1'(x).e^x + 3.C_3'(x).e^{3.x} = \dfrac{2.x+1}{x^2}.e^x \end{cases}$$, et cela donne :

* $C_1'(x) = -\dfrac{2.x+1}{2.x^2}$, soit : $C_1(x) = -\ln(|x|) + \dfrac{1}{2.x}$, sur les deux intervalles, puis :
* $C_3'(x) = \dfrac{2.x+1}{2.x^2}.e^{-2.x}$, soit : $C_3(x) = -\dfrac{e^{-2.x}}{2.x}$, là aussi sur les deux intervalles.

Finalement, on obtient : $y(x) = -\ln(|x|).e^x$,comme solution particulière de cette équation différentielle.

Utilisation de séries entières :

• pour certains types d'équations différentielles linéaires (notamment dont les coefficients sont des polynômes), on peut chercher des solutions sous forme de séries entières : $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n$, en

supposant a priori leur rayon de convergence R non nul.
La fonction y est alors de classe C^∞ sur]-R,+R[,et on obtient ses dérivées successives en dérivant la série terme à terme.
On remplace alors la fonction inconnue par la série entière, puis on transforme pour obtenir une série entière nulle,et on arrive à une condition récurrente liant les différents coefficients de la série entière.
On termine en précisant le rayon de convergence de la série entière ainsi trouvée.
Remarque : il est parfois nécessaire de mettre à part certaines valeurs de l'indice au moment d'obtenir la relation de récurrence liant les coefficients.

exemple : $x^2.(1 – x).y'' – x.(1 + x).y' + y = 0$.

On pose donc : $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n$, une série entière dont le rayon de convergence R est supposé a priori non nul.
Sur]-R,+R[, y est deux fois dérivable et se dérive terme à terme.
On a donc : $\forall x \in]-R,+R[$, $y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n.a_n.x^{n-1}$, $y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n.(n-1).a_n.x^{n-2}$, et :
y est solution de l'équation sur]-R,+R[si et seulement si :
$\forall x \in]-R,+R[$, $x^2.(1 – x). \sum_{n=2}^{+\infty} n.(n-1).a_n.x^{n-2} – x.(1 + x). \sum_{n=1}^{+\infty} n.a_n.x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n = 0$.
En développant et en procédant à des translations d'indice dans certaines sommes, c'est équivalent à :
$\forall x \in]-R,+R[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} [(n-1)^2.a_n - (n-1)^2.a_{n-1}].x^n + a_0 = 0$, donc encore équivalent à :
($a_0 = 0$, et : $\forall n \geq 1$, $(n – 1)^2.(a_n – a_{n-1}) = 0$), soit finalement :
($a_0 = 0$, $a_1 \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq 1$, $a_n = a_1$), donc à la série entière : $y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_1.x^n$.
On termine alors en disant que :
- si : $a_1 = 0$, la série entière a un rayon de convergence infini et c'est la série nulle,
- si : $a_1 \neq 0$, la série entière a un rayon de convergence égal à 1 et elle est solution de l'équation différentielle sur]-1,+1[.

Dans ce dernier cas, on peut alors en plus, la sommer et obtenir : $y(x) = a_1.\frac{x}{1-x} = a_1'.\frac{x}{x-1}$.
Pour terminer, on peut remarquer que la fraction que l'on a obtenue comme solution sur]-1,+1[, est en fait solution de l'équation sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ évitant la valeur 1 (vérification à la main, a posteriori) et donc cela fournit une première fonction de base sur tout intervalle I où on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Changement de variable ou de fonction inconnue dans une équation différentielle :

• Changement de fonction inconnue :
On utilise parfois un changement de fonction inconnue pour remplacer l'équation différentielle, qu'on ne sait pas résoudre sous la forme proposée, par une autre, plus classique.
Dans ce cas, on est obligé au départ, si on veut traiter les choses de façon théorique, de faire appel à la version « non linéaire » du théorème de Cauchy-Lipschitz.
Vous n'avez pas à connaître de classes d'équations différentielles particulières, donc tout changement de fonction inconnue doit vous être, s'il est envisageable, explicitement proposé.

exemple : (E) $y' – y – x^2.y^2 = 0$ (équation dite « de Ricatti »).

On va chercher ici une solution y ne s'annulant pas sur un intervalle I et poser : $z = \frac{1}{y}$.
Sur I, on a alors l'équivalence : (y définie, continue et dérivable) $\Leftrightarrow$ (z définie, continue et dérivable).
On calcule alors : $\forall x \in I$, $y'(x) = -\frac{z'(x)}{(z(x))^2}$, et on remplace dans (E) pour obtenir : $z' + z + x^2 = 0$.
Cette nouvelle équation en z se résout dans difficulté, et on aboutit à :
$\forall x \in I$, $z(x) = C.e^{-x} – x^2 + 2.x – 2$.

On en déduit enfin y en faisant attention à l'intervalle sur lequel on travaille.

• Changement de variable :
Pour effectuer un changement de variable dans une équation différentielle, on effectue **toujours** en parallèle un changement de fonction inconnue.
De plus, on utilise comme changement de variable un C^1- ou C^2-difféomorphisme pour passer de l'intervalle de variation de la variable initiale (par exemple x) à celui de la nouvelle variable (par exemple t).
Remarque : pour cette technique également, le changement de variable est toujours explicitement proposé.

exemple : $y'' + y' - e^{-2.x}.y = e^{-3.x}$, avec le changement de variable : $t = e^{-x}$.
On peut commencer par faire remarquer que le théorème de Cauchy-Lipschitz donne des informations sur les solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle.
Elles forment en effet un espace vectoriel réel de dimension 2.
Puis, la formule-clé qui va permettre de travailler proprement est alors : $y(x) = z(t)$.
En effet, la fonction φ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = e^{-x}$, est bien un C^2-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ (intervalle de variation de x) sur $\mathbb{R}^{+*}$ (intervalle de variation de t).
On constate alors que : $y = zo\varphi$, ou : $z = yo\varphi^{-1}$, et on en déduit l'équivalence :
(y définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow$ (z définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$).
On calcule ensuite : $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = -e^{-x}.z'(e^{-x}), y''(x) = e^{-x}.z'(e^{-x}) + e^{-2.x}.z''(e^{-x})$.
En remplaçant dans (E) on constate alors que :
(y solution de (E) sur $\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow$ ($\forall x \in \mathbb{R}, e^{-2.x}.z''(e^{-x}) - e^{-2.x}.z(e^{-x}) = e^{-3.x}$) $\Leftrightarrow$ ($\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, z'' - z = t$).
La nouvelle équation en z se résout immédiatement en : $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, z(t) = a.e^t + B.e^t - t, (A,B) \in \mathbb{R}^2$.
Enfin, on obtient les solutions y de l'équation initiale avec : $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = z(e^{-x})$.