Espaces vectoriels normés.

Chap. 12 : cours complet.

1. Normes, distances.

Définition 1.1 : norme dans un **K**-espace vectoriel
Exemples 1.1 : normes N_1, N_2, N_∞ dans $\mathbf{K}^n$ ou $C^0([a,b],\mathbf{K})$
Exemples 1.2 : espaces de fonctions intégrables et de carré intégrable
Définition 1.2 et théorème 1.1 : distance, distance associée à une norme
Définition 1.3 : boule ouverte, boule fermée, sphère dans un espace vectoriel normé
Définition 1.4 : partie convexe
Théorème 1.2 : convexité des boules
Définition 1.5 : *(hors programme)* norme matricielle (ou norme d'algèbre)
Exemple 1.3 : norme matricielle dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$

2. Suites dans un K-espace vectoriel normé de dimension finie.

Théorème 2.1 et définition 2.1 : norme infinie attachée à une base
Définition 2.1 : suite d'éléments d'un **K**-espace vectoriel
Définition 2.2 : suite convergente ou divergente dans un **K**-espace vectoriel normé de dimension finie
Théorème 2.1 : unicité de la limite d'une suite convergente pour une norme
Définition 2.3 : suite bornée pour une norme
Théorème 2.2 : la convergence entraîne le caractère borné
Théorème 2.3 : espace vectoriel des suites convergentes pour une norme
Théorème 2.4 : convergence des suites extraites d'une suite convergente
Théorème 2.5 : *(admis)* convergence, caractère borné, limite d'une suite et changement de norme
Théorème 2.6 : liens entre suite et suites coordonnées dans une base de l'espace

3. Topologie métrique élémentaire dans les espaces vectoriels de dimension finie.

Définition 3.1 : point intérieur à une partie dans un espace vectoriel normé, intérieur d'un ensemble
Définition 3.2 : ouvert ou partie ouverte d'un espace vectoriel normé
Théorème 3.1 : exemple des boules ouvertes
Définition 3.3 : point adhérent à une partie dans un espace vectoriel normé, adhérence
Définition 3.4 : fermé ou partie fermée d'un espace vectoriel normé
Théorème 3.2 : exemple des boules fermées et des sphères
Théorème 3.3 : caractérisation séquentielle des points adhérents
Théorème 3.4 : caractérisation séquentielle des fermés
Définition 3.5 : partie bornée d'un espace vectoriel normé

4. Limites de fonctions entre espaces vectoriels de dimension finie.

Définition 4.1 : limite en un point d'une fonction entre espaces vectoriels normés
Théorème 4.1 : conséquences de l'existence d'une limite en un point
Théorème 4.2 : caractérisation séquentielle de l'existence d'une limite
Théorème 4.3 : limite et utilisation d'une base de l'espace d'arrivée, fonctions composantes
Théorème 4.4 : limite d'une combinaison linéaire
Théorème 4.5 : limite d'une composée
Théorème 4.6 : limite d'un produit et d'un quotient de fonctions réelles de variable vectorielle

5. Continuité.

Définition 5.1 : continuité en un point, continuité d'une fonction entre espaces vectoriels normés
Théorème 5.1 : continuité et utilisation d'une base de l'espace d'arrivée, fonctions composantes
Théorème 5.2 : opérations sur les fonctions continues
Théorème 5.3 : *(admise pour le troisième point)* continuité et topologie
Définition 5.2 : fonction lipschitzienne
Théorème 5.4 : continuité des fonctions lipschitziennes
Théorème 5.5 : continuité des applications linéaires entre espaces vectoriels de dimension finie
Exemples 5.1 : fonctions polynomiales, rationnelles, application déterminant

Espaces vectoriels normés.

Chap. 12 : cours complet.

1. Normes, distances.

Définition 1.1 : norme dans un K-espace vectoriel

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel.
On dit que N est une norme sur E si et seulement si :
- c'est une application de E dans $\mathbb{R}^+$,
- $\forall$ x $\in$ E, (N(x) = 0) $\Rightarrow$ (x = 0),
- $\forall$ x $\in$ E, $\forall$ $\lambda \in$ **K**, N(λ.x) = |λ|.N(x),
- $\forall$ (x,y) $\in$ E², N(x + y) $\leq$ N(x) + N(y).

On dit alors que (E,N) est un **K**-espace vectoriel normé.

Exemples 1.1 : normes N_1, N_2, N_∞

Les applications définies par : $\forall$ x = (x_1, …, x_n) $\in$ $\mathbf{K}^n$,
- $N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$,
- $N_2(x) = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$,
- $N_\infty(x) = \max_{1\leq i\leq n}(|x_i|)$,

sont des normes dans $\mathbf{K}^n$.
Les applications définies par : $\forall$ f $\in$ C^0([a,b],**K**),
- $N_1(f) = \int_a^b |f(t)|.dt$,
- $N_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2.dt}$,
- $N_\infty(f) = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$,

sont des normes sur C^0([a,b],**K**).
Les normes N_2 dans les deux cas sont dites attachées au produit scalaire correspondant dans le cas d'espaces vectoriels réels.

Démonstration :

Commençons par les normes dans $\mathbf{K}^n$.
- (N_1)

- Pour x dans $\mathbf{K}^n$, N_1(x) est défini est positif, comme une somme finie de réels positifs.
- De plus, il est immédiat que : $\forall$ x $\in$ $\mathbf{K}^n$, $\forall$ $\lambda \in$ **K**, $N_1(\lambda.x) = |\lambda|.N_1(x)$.
- Puis : $\forall$ x $\in$ $\mathbf{K}^n$, si : $N_1(x) = 0$, alors : $\forall$ 1 $\leq$ i $\leq$ n, $0 \leq |x_i| \leq N_1(x) = 0$, donc : $|x_i| = 0$, puis : x = 0.
- Enfin : $\forall$ (x,y) $\in$ $(\mathbf{K}^n)^2$, $\forall$ 1 $\leq$ i $\leq$ n, $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$, d'où en sommant : $N_1(x+y) \leq N_1(x) + N_1(y)$.

- (N_∞)

- De même, pour x dans $\mathbf{K}^n$, N_∞(x) est correctement défini puisque c'est le plus grand élément d'un nombre fini de réels positifs, qui est donc lui-même un réel positif.
- Puis : $\forall$ x $\in$ $\mathbf{K}^n$, $\forall$ $\lambda \in$ **K**, $\forall$ 1 $\leq$ i $\leq$ n, $|x_i| \leq N_\infty(x)$, donc : $|\lambda.x_i| \leq |\lambda|.|x_i| \leq |\lambda|.N_\infty(x)$,

et tous les termes étant majorés par une même constante, on en déduit que : $N_\infty(\lambda.x) \leq |\lambda|.N_\infty(x)$.
Si ensuite, λ est nul, l'égalité cherchée est immédiate, et si λ est non nul, alors :

$N_\infty(x) = N_\infty\left(\frac{1}{\lambda}.\lambda.x\right) \leq \frac{1}{|\lambda|}.N_\infty(\lambda.x)$, et on obtient ainsi une deuxième inégalité, puis l'égalité voulue.

- D'autre part : $\forall$ x $\in$ $\mathbf{K}^n$, ($N_\infty(x) = 0$) $\Rightarrow$ ($\forall$ 1 $\leq$ i $\leq$ n, $0 \leq |x_i| \leq N_\infty(x) = 0$) $\Rightarrow$ ($\forall$ 1 $\leq$ i $\leq$ n, $|x_i| = 0$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (x = 0).

- Enfin : $\forall$ (x,y) $\in$ $(\mathbf{K}^n)^2$, $\forall$ 1 $\leq$ i $\leq$ n, $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq N_\infty(x) + N_\infty(y)$,

et tous les termes étant majorés par une même constante, on conclut : $N_\infty(x+y) \leq N_\infty(x) + N_\infty(y)$.

• (N_2)
- Pour x dans $\mathbf{K}^n$, comme précédemment, $N_2(x)$ est correctement défini et appartient à $\mathbb{R}^+$.
- Il est également clair que : $\forall$ x $\in$ $\mathbf{K}^n$, $\forall$ $\lambda \in$ **K**, $N_2(\lambda.x) = |\lambda|.N_2(x)$.
- De même : $\forall$ x $\in$ $\mathbf{K}^n$, si : $N_2(x) = 0$, alors : $\forall$ 1 ≤ i ≤ n, $0 \le |x_i|^2 \le N_2(x)^2 = 0$, d'où : $|x_i| = 0$, et : x = 0.
- Enfin, pour l'inégalité triangulaire, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz obtenue pour le produit scalaire canonique défini dans $\mathbb{R}^n$ par : $\forall$ (x,y) $\in$ $(\mathbb{R}^n)^2$, $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i$, et donc : $|(x|y)| \le N_2(x).N_2(y)$.

On peut alors en déduire que : $\forall$ (x,y) $\in$ $(\mathbb{R}^n)^2$,
$N_2(x+y)^2 = N_2(x)^2 + N_2(y)^2 + 2.(x|y) \le N_2(x)^2 + N_2(y)^2 + 2.N_2(x).N_2(y) = (N_2(x) + N_2(y))^2$,
et l'inégalité triangulaire (pour la norme) en découle.

On considère ensuite x et y dans $\mathbb{C}^n$, et : $N_2(x+y) = \sqrt{|x_1+y_1|^2 + \ldots + |x_n+y_n|^2}$.

Or : $\forall$ 1 ≤ i ≤ n, $|x_i + y_i|^2 \le (|x_i| + |y_i|)^2$, et en sommant : $\forall$ 1 ≤ i ≤ n, $N_2(x+y) \le N_2(x'+y')$,
où on a posé : $x' = (|x_1|,\ldots,|x_n|)$, et : $y' = (|y_1|,\ldots,|y_n|)$.
Donc : $N_2(x+y) \le N_2(x'+y') \le N_2(x') + N_2(y')$.
Et comme : $N_2(x') = \sqrt{|x'_1|^2 + \ldots + |x'_n|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2} = N_2(x)$, de même pour y', on conclut que :
$N_2(x+y) \le N_2(x') + N_2(y') \le N_2(x) + N_2(y)$.

• (N_1)
- Pour f dans E, $|f|$ est continue de [a,b] dans $\mathbb{R}^+$ donc son intégrale sur [a,b] existe et est un réel positif.
- Puis, pour : f $\in$ E, si : $N_1(f) = 0$, alors $|f|$ étant continue et positive sur [a,b], $|f|$ est nulle, et f aussi.
- Ensuite : $\forall$ f $\in$ E, $\forall$ $\lambda \in$ **K**, $N_1(\lambda.f) = |\lambda|.N_1(f)$, du fait de la linéarité de l'intégrale sur [a,b].
- Enfin : $\forall$ (f,g) $\in$ E^2, $\forall$ t $\in$ [a,b], $|(f+g)(t)| \le |f(t)| + |g(t)|$, et en intégrant sur [a,b] :
$N_1(f+g) \le N_1(f) + N_1(g)$.

• (N_∞)
- Pour f dans E, |f| est continue et à valeurs réelles sur [a,b], donc elle y admet un sup dans $\mathbb{R}^+$.
- Si pour f dans E, on a : $N_\infty(x) = 0$, alors : $\forall$ t $\in$ [a,b], $0 \le |f(t)| \le N_\infty(t) = 0$, et f est nulle sur [a,b].
- Puis, pour : f $\in$ E, $\lambda \in$ **K**, $\forall$ t $\in$ [a,b], $|\lambda.f(t)| = |\lambda|.|f(t)| \le |\lambda|.N_\infty(f)$,
et puisque la fonction est majorée sur [a,b] par une constante, on en déduit que : $N_\infty(\lambda.f) \le |\lambda|.N_\infty(f)$.
Si ensuite λ est nul, l'égalité cherchée est immédiate et si λ est non nul, alors :
$N_\infty(f) = N_\infty\left(\frac{1}{\lambda}.\lambda.f\right) \le \frac{1}{|\lambda|}.N_\infty(\lambda.f)$, et on obtient ainsi une deuxième inégalité, puis l'égalité voulue.
- Enfin : $\forall$ (f,g) $\in$ E^2, $\forall$ t $\in$ [a,b], $|(f+g)(t)| \le |f(t)| + |g(t)| \le N_\infty(f) + N_\infty(g)$,
et la fonction étant majorée sur [a,b] par une constante, on conclut que : $N_\infty(f+g) \le N_\infty(f) + N_\infty(g)$.

• (N_2)
- Pour f dans E, comme précédemment, $N_2(f)$ est correctement défini et appartient à $\mathbb{R}^+$.
- Avec les mêmes arguments que pour N_1, si pour f dans E, on a : $N_2(f) = 0$, alors f est nulle.

- La linéarité de l'intégrale sur [a,b] donne encore : $\forall$ f $\in$ E, $\forall$ $\lambda \in$ **K**, $N_2(\lambda.f) = |\lambda|.N_2(f)$.
- Enfin, pour l'inégalité triangulaire, on utilise là encore l'inégalité de Cauchy-Schwarz obtenue pour le produit scalaire canonique dans $C^0([a,b],\mathbb{R})$ défini par : $\forall$ (f,g) $\in$ $C^0([a,b],\mathbb{R})$, $(f|g) = \int_a^b f(t).g(t).dt$.
En effet : $\forall$ (f,g) $\in$ $C^0([a,b],\mathbb{R})^2$,
$N_2(f+g)^2 = N_2(f)^2 + N_2(g)^2 + 2.(f|g) \le N_2(f)^2 + N_2(g)^2 + 2.N_2(f).N_2(g) = (N_2(f) + N_2(g))^2$,
d'où l'inégalité triangulaire dans $C^0([a,b],\mathbb{R})$ pour N_2.
Et dans $C^0([a,b],\mathbb{C})$, on écrit comme précédemment pour N_2 dans $\mathbb{C}^n$: $\forall$ (f,g) $\in$ $C^0([a,b],\mathbb{C})^2$,

$$N_2(f+g)^2 = \int_a^b |f+g|^2 \leq \int_a^b (|f|+|g|)^2 = N_2(|f|+|g|)^2 \leq (N_2(|f|)+N_2(|g|))^2 = (N_2(f)+N_2(g))^2,$$

en utilisant l'inégalité triangulaire dans $C^0([a,b],\mathbb{R})$ qu'on vient d'établir et le fait que :

$N_2(|f|)^2 = \int_a^b |f|^2 = N_2(f)^2$, avec la même égalité pour g.

Donc N_2 est encore une norme dans $C^0([a,b],\mathbb{C})$.

Exemples 1.2 : espaces de fonctions intégrables et de carré intégrable

- L'ensemble $\mathbf{L}^1_{cm}(I,\mathbf{K})$ des fonctions continues par morceaux de I dans **K** et intégrables sur I forme un **K**-espace vectoriel et l'ensemble $\mathbf{L}^1(I,\mathbf{K})$ des fonctions continues de I dans **K** et intégrables sur I en est un sous-espace vectoriel.

L'application N_1 définie par : $\forall f \in \mathbf{L}^1(I,\mathbf{K})$, $N_1(f) = \int_I |f(t)|.dt$, est une norme sur cet espace.

- L'ensemble $L^2_{cm}(I,\mathbf{K})$ des fonctions continues par morceaux de I dans **K** et de carré intégrable sur I forme un **K**-espace vectoriel et l'ensemble $\mathbf{L}^2(I,\mathbf{K})$ des fonctions continues de I dans **K** et de carré intégrable sur I en est un sous-espace vectoriel.

L'application définie sur $L^2(I,\mathbb{R})$ par : $\forall (f,g) \in \mathbf{L}^2(I,\mathbb{R})^2$, $(f|g) = \int_I f(t).g(t).dt$, est un produit scalaire sur cet espace.

L'application N_2 définie par : $\forall f \in \mathbf{L}^2(I,\mathbf{K})$, $N_2(f) = \sqrt{\int_I |f(t)|^2.dt}$, est une norme sur $\mathbf{L}^2(I,\mathbf{K})$.

Démonstration :

- L'ensemble $\mathbf{L}^1_{cm}(I,\mathbf{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I,\mathbf{K})$.

- En effet, il est bien inclus dedans, il est non vide puisque la fonction nulle de I dans **K** est bien continue par morceaux et intégrable sur I.

Enfin, il est stable par combinaison linéaire car :

$\forall (f,g) \in \mathbf{L}^1_{cm}(I,\mathbf{K})$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$, $|\lambda.f(t)+\mu.g(t)| \leq |\lambda|.|f(t)|+|\mu|.|g(t)|$.

Par comparaison de fonctions à valeurs positives, on en déduit l'intégrabilité sur I de $(\lambda.f+\mu.g)$.

- De même, $\mathbf{L}^1(I,\mathbf{K})$ est bien inclus dans $\mathbf{L}^1_{cm}(I,\mathbf{K})$, il est non vide et stable par combinaison linéaire.

- Enfin l'application N_1 est bien une norme sur $\mathbf{L}^1(I,\mathbf{K})$..

En effet, elle y est correctement définie (toutes les fonctions sont intégrables sur I), et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Il est immédiat par ailleurs que : $\forall f \in E_1$, $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $N_1(\lambda.f) = |\lambda|.N_1(f)$.

L'inégalité triangulaire découle de la majoration : $\forall (f,g) \in E_1^2$, $\forall t \in I$, $|f(t)+g(t)| \leq |f(t)|+|g(t)|$.

Enfin, la continuité et la positivité de f sur I donne : $\forall f \in E_1$, $(N_1(f)=0) \Rightarrow (f=0)$.

- L'ensemble $\mathbf{L}^2_{cm}(I,\mathbf{K})$ est bien un sous-espace vectoriel de $C^0(I,\mathbf{K})$.

- En effet, il est inclus dedans et il est non vide (la fonction nulle est de carré intégrable sur I).

- De plus, pour : $\lambda \in \mathbf{K}$, $f \in \mathbf{L}^2_{cm}(I,\mathbf{K})$, $\lambda.f$ est bien de carré intégrable sur I, et :

$\forall (f,g) \in \mathbf{L}^2_{cm}(I,\mathbf{K})^2$, $|f.g| \leq \frac{1}{2}.(|f|^2+|g|^2)$, ce qui entraîne :

$$|f+g|^2 = |f|^2+|g|^2+2.\mathrm{Re}(\overline{f}.g) \leq |f|^2+|g|^2+2.|f.g| \leq |f|^2+|g|^2+\frac{1}{2}.(|f|^2+|g|^2),$$

et l'intégrabilité sur I de $(f+g)^2$, par comparaison de fonctions à valeurs positives.

Donc pour tout couple (f,g) d'éléments de $\mathbf{L}^2_{cm}(I,\mathbf{K})$, la somme est encore élément de $\mathbf{L}^2_{cm}(I,\mathbf{K})$.

- Par ailleurs, il est alors immédiat que $\mathbf{L}^2(I,\mathbf{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{L}^2_{cm}(I,\mathbf{K})$.
- Puis l'application proposée est alors correctement définie de $\mathbf{L}^2(I,\mathbb{R})^2$ dans $\mathbb{R}$ en utilisant la majoration précédente de $|f.g|$ pour : $(f,g) \in \mathbf{L}^2(I,\mathbb{R})$.

De plus, elle est clairement bilinéaire, symétrique et positive et si pour : $f \in \mathbf{L}^2(I,\mathbb{R})$, on a : $(f|g) = 0$, alors la continuité et la positivité de f^2 sur I entraîne la nullité de f sur I

Donc on obtient bien ainsi un produit scalaire sur $\mathbf{L}^2(I,\mathbb{R})$.

- L'application N_2 est ainsi une norme sur $\mathbf{L}^2(I,\mathbb{R})$, associée à ce produit scalaire.
- Enfin sur $\mathbf{L}^2(I,\mathbb{C})$, on a comme dans $C^0([a,b],\mathbb{C})$: $\forall (f,g) \in \mathbf{L}^1(I,\mathbb{R})^2$,

$$N_2(f+g)^2 = \int_I |f+g|^2 \leq \int_I (|f|+|g|)^2 = N_2(|f|+|g|)^2 \leq (N_2(|f|)+N_2(|g|))^2 = (N_2(f)+N_2(g))^2,$$

en s'appuyant à nouveau sur l'inégalité triangulaire établie dans $\mathbf{L}^1(I,\mathbb{R})$.

Remarque : norme de la convergence uniforme

Dans $C^0(\{a,b\},\mathbf{K})$, la norme N_∞ est aussi appelée norme de la convergence uniforme, tout comme dans l'espace vectoriel des fonctions continues, bornées de I dans **K** où I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

Définition 1.2 et théorème 1.1 : distance, distance associée à une norme

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel.

On dit que d est une distance sur E si et seulement si :

- c'est une application de $E\times E$ dans $\mathbb{R}^+$,
- $\forall (x,y) \in E^2$, $(d(x,y) = 0) \Rightarrow (x = y)$,
- $\forall (x,y) \in E^2$, $d(x,y) = d(y,x)$,
- $\forall (x,y,z) \in E^3$, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, (inégalité triangulaire).

Si N est une norme sur E, l'application définie par : $\forall (x,y) \in E^2$, $d(x,y) = N(x-y)$, est une distance sur E, appelée distance associée (ou liée) à la norme N.

Démonstration :

Les différents points se démontrent sans difficulté :

- d est bien une application de $E\times E$ dans $\mathbb{R}^+$,
- pour : $(x,y) \in E^2$, $(d(x,y) = 0) \Rightarrow (N(x - y) = 0) \Rightarrow (x - y = 0) \Rightarrow (x = y)$,
- pour : $(x,y) \in E^2$, $d(y,x) = N(y - x) = N(-(x - y)) = |-1|.N(x - y) = N(x - y)$,
- pour : $(x,y,z) \in E^3$, $d(x,z) = N(x - z) = N((x - y) + (y - z)) \leq N(x - y) + N(y - z) = d(x,y) + d(y,z)$.

Définition 1.3 : boule ouverte, boule fermée, sphère dans un espace vectoriel normé

Soit (E,N) un espace vectoriel normé.

Pour x_0 élément de E, et r réel strictement positif, on définit :

- la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r pour la norme N par :
  $B_N(x_0,r) = \{x \in E, N(x - x_0) < r\}$,
- la boule fermée de centre x_0 et de rayon r pour la norme N par :
  $B'_N(x_0,r) = \{x \in E, N(x - x_0) \leq r\}$.
- la sphère de centre x_0 et de rayon r pour la norme N par :
  $S_N(x_0,r) = \{x \in E, N(x - x_0) = r\}$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la norme, on note simplement $B(x_0,r)$, $B'(x_0,r)$ et $S(x_0,r)$.

Définition 1.4 : partie convexe

Soit (E,N) un espace vectoriel normé.

Une partie A de E est dite convexe lorsque : $\forall (x,y) \in A^2$, $\forall t \in [0,1]$, $(1-t).x+t.y \in A$.

Théorème 1.2 : convexité des boules

Soit (E,N) un espace vectoriel normé.

Pour x_0 élément de E, et r réel strictement positif, les boules $B_N(x_0,r)$ et $B_N(x_0,r)$ sont des convexes.

Démonstration :

Soient donc : $(x,y) \in E^2$, et : $t \in [0,1]$.

Alors : $N(((1-t).x+t.y)-x_0) = N((1-t).(x-x_0)+t.(y-x_0)) \leq |1-t|.N(x-x_0)+|t|.N(y-x_0)$.

Et puisque t et (1 – t) sont positifs, on obtient : $N(((1-t).x+t.y)-x_0) \leq (1-t).N(x-x_0)+t.N(y-x_0)$.

- Si de plus on a : $(x,y) \in B_N(x_0,r)^2$, alors : $N(((1-t).x+t.y)-x_0) < (1-t).r+t.r = r$,
- De même, si : $(x,y) \in B_N'(x_0,r)$, alors : $N(((1-t).x+t.y)-x_0) \leq (1-t).r+t.r = r$.

Dans les deux cas, l'élément $(1-t).x+t.y$ est dans la même boule que celle où se trouvaient x et y et ces deux boules sont bien des convexes de E.

Définition 1.5 : (hors programme) norme matricielle (ou norme d'algèbre)

On dit qu'une norme N est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ lorsque :

$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$, $N(A.B) \leq N(A).N(B)$.

Plus généralement, si un espace vectoriel (E,+,.) dispose d'une deuxième loi interne (notée ×) qui fait de (E,+,×) un anneau, on dit que N est une norme d'algèbre sur E si : $\forall (x,y) \in E^2$, $N(x.y) \leq N(x).N(y)$.

Exemple 1.3 : norme matricielle dans $\mathcal{M}_n(K)$

L'application définie sur $\mathcal{M}_n$(**K**) par : ∀ A ∈ $\mathcal{M}_n$(**K**), $N(A) = \max\limits_{1\le i\le j} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$, définit une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n$(**K**).

Démonstration :

L'application proposée est tout d'abord bien une norme puisque :

- Pour A fixée, N(A) est défini comme le plus grand d'une famille finie de réels positifs et est donc lui-même un réel positif,
- En reprenant la démonstration faite pour N_∞ dans $\mathbb{R}^n$, on a : ∀ A ∈ $\mathcal{M}_n$(**K**), ∀ λ ∈ **K**, $N(\lambda.A) = |\lambda|.N(A)$,
- Si pour : A ∈ $\mathcal{M}_n$(**K**), on a : $N(A) = 0$, alors :

∀ 1 ≤ i ≤ n, $0 \le \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \le N(A) = 0$, donc : $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = 0$, puis : ∀ 1 ≤ j ≤ n, $|a_{i,j}| = a_{i,j} = 0$, d'où : A = 0,

- Enfin : ∀ (A,B) ∈ $\mathcal{M}_n$(**K**)^2, ∀ 1 ≤ i,j ≤ n, $|a_{i,j} + b_{i,j}| \le |a_{i,j}| + |b_{i,j}|$, d'où :

∀ 1 ≤ i ≤ n, $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}| \le \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}| + \sum\limits_{j=1}^{n} |b_{i,j}| \le N(A) + N(B)$,

inégalité vraie aussi pour la plus grande de ces sommes, autrement dit : $N(A+B) \le N(A) + N(B)$.

De plus : ∀ (A,B) ∈ $\mathcal{M}_n$(**K**)^2,

∀ 1 ≤ i ≤ n, $\sum\limits_{j=1}^{n} \left| \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}.b_{k,j} \right| \le \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{i,k}.b_{k,j}| = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,k}|.|b_{k,j}| = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{i,k}|.\sum\limits_{j=1}^{n} |b_{k,j}|$, puis :

$\sum\limits_{j=1}^{n} \left| \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}.b_{k,j} \right| \le \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{i,k}|.N(B) \le N(A).N(B)$, et a fortiori pour la plus grande de ces sommes, soit :

$N(A.B) \le N(A).N(B)$.

2. Suites dans un K-espace vectoriel normé de dimension finie.

Théorème 2.1 et définition 2.1 : norme infinie attachée à une base dans un espace vectoriel de dimension finie

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une base : $\mathcal{B}$ = (e_1, …, e_n).

L'application qui à un vecteur : $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i.e_i$, de E fait correspondre : $N_{\infty,\mathcal{B}}(x) = \max\limits_{1\le i\le n}(|x_i|)$, est une norme sur E appelée norme infinie attachée à la base $\mathcal{B}$, et notée N_∞ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la base.

Démonstration :

Elle est formellement identique à celle qui établit que N_∞ est une norme dans **K**^{n}.

Remarque :

On peut donc toujours munir un **K**-espace vectoriel de dimension finie d'une norme.

Définition 2.2 : suite d'éléments d'un K-espace vectoriel

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel.

Une suite d'éléments de E est une application de ℕ (ou d'un sous-ensemble de ℕ de type {n_0, n_0+1, …}) dans E.

On la note : x = $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, x = (x_n), ou : x = $(x_n)_{n\ge n_0}$, avec : ∀ n ∈ ℕ (ou : ∀ n ≥ n_0), x_n ∈ E.

L'ensemble $E^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de E peut être muni d'une structure de **K**-espace vectoriel.

Définition 2.3 : suite convergente, divergente dans un K-espace vectoriel normé de dimension finie

Soit (E,N) un **K**-espace vectoriel normé.

On dit que (x_n), suite d'éléments de E converge (pour la norme N) si et seulement si :

∃ L ∈ E, ∀ ε > 0, ∃ n_0 ∈ ℕ, ∀ n ≥ n_0, $N(x_n - L) \le \varepsilon$.

L est alors appelée limite de la suite (x_n) (pour la norme N).
Si une suite ne converge pas (pour la norme N), elle diverge (voir le théorème 2.5).

Théorème 2.1 : unicité de la limite d'une suite convergente pour une norme

Soit (E,N) un **K**-espace vectoriel normé et (x_n) une suite d'éléments de E.
Si (x_n) converge (pour la norme N), sa limite pour cette norme est unique, et on la note $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ (voir à nouveau le théorème 2.5).

Démonstration :

Raisonnons par l'absurde : supposons que (x_n) admette deux limites L et L' distinctes (pour la norme N).

Si on pose alors : $\varepsilon = \frac{1}{3}.N(L-L') > 0$, (puisque : $L - L' \neq 0$), alors :

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \geq n_0$, $N(x_n - L) \leq \varepsilon$, et : $\exists\, n'_0 \in \mathbb{N}$, $N(x_n - L') \leq \varepsilon$.

Donc pour : $N = \max(n_0, n'_0)$, on a : $N(x_n - L) \leq \varepsilon$, et : $N(x_n - L') \leq \varepsilon$.

Mais alors : $N(L-L') \leq N((L-x_n)+(x_n-L')) \leq N(L-x_n)+N(x_n-L') \leq 2.\varepsilon = \frac{2}{3}.N(L-L')$,

ce qui est impossible puisque N(L – L') est supposé être un réel strictement positif.

Définition 2.4 : suite bornée

Soit (E,N) un **K**-espace vectoriel normé et (x_n) une suite d'éléments de E.
On dit que (x_n) est bornée (pour la norme N) si et seulement si :

$\exists\, M \in \mathbb{R}^+$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $N(x_n) \leq M$.

Théorème 2.2 : la convergence entraîne le caractère borné

Soit (E,N) un **K**-espace vectoriel normé et (x_n) une suite d'éléments de E.
Si (x_n) converge pour la norme N, (x_n) est bornée pour cette norme.

Démonstration :

Soit (x_n) une suite convergente d'éléments de E pour la norme N vers L.

Alors, pour : $\varepsilon = 1 > 0$, il existe un rang n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que : $\forall\, n \geq n_0$, $N(x_n - L) \leq \varepsilon = 1$.

On a donc, à l'aide de l'inégalité triangulaire : $\forall\, n \geq n_0$, $N(x_n) \leq N(x_n - L) + N(L) \leq 1 + N(L)$.

En posant : $M = \max(N(x_0),\ldots,N(x_{n_0-1}),1+N(L))$, on a alors : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $N(x_n) \leq M$,

et la suite (x_n) est bien bornée.

Théorème 2.3 : espace vectoriel des suites convergentes pour une norme

Soit (E,N) un **K**-espace vectoriel normé.
L'ensemble des suites d'éléments de E convergentes pour la norme N forme un sous-espace vectoriel $E^{\mathbb{N}}_c$ du **K**-espace vectoriel $E^{\mathbb{N}}$.
L'application qui à une suite d'éléments de E convergente pour la norme N, fait correspondre la limite de cette suite pour cette norme, est une application linéaire de $E^{\mathbb{N}}_c$ dans E.
En particulier, on a donc :

$\forall\, ((x_n),(y_n)) \in (E^{\mathbb{N}}_c)^2$, $\forall\, (\alpha,\beta) \in \mathbf{K}^2$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha.x_n + \beta.y_n) = \alpha.\lim\limits_{n\to+\infty} x_n + \beta.\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

Démonstration :

- Soient donc (x_n) et (y_n) deux suites convergeant respectivement vers L_x et L_y, et : $\alpha \in \mathbf{K}^*$.

Alors : $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_x \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \geq n_x$, $N(x_n - L_x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, et : $\exists\, n_y \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \geq n_y$, $N(y_n - L_y) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc en posant : $n_0 = \max(n_x, n_y)$, on a bien :

$\forall\, n \geq n_0$, $N((x_n + y_n) - (L_x + L_y)) \leq N(x_n - L_x) + N(y_n - L_y) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$,

et la suite $((x_n) + (y_n))$ converge vers $[L_x + L_y]$ pour la norme N.

- Puis : $\forall\, \alpha \in \mathbf{K}$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \geq n_0$, $N(x_n - L_x) \leq \frac{\varepsilon}{|\alpha|+1}$, d'où : $\forall\, n \geq n_0$ $N(\alpha.x_n - \alpha.L_x) \leq \varepsilon$,

et la suite $\alpha.(x_n)$ converge vers $\alpha.L_x$ pour la norme N.

• Considérons enfin l'ensemble $E^{\mathbb{N}}_c$ des suites d'éléments de E, convergeant pour la norme N.
- Cet ensemble est inclus dans $E^{\mathbb{N}}$, est non vide puisque la suite nulle converge vers 0 pour toute norme de E et on vient de montrer qu'il était stable par combinaison linéaire.
- C'est donc bien un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$ et l'application qui à un élément de $E^{\mathbb{N}}_c$ associe sa limite pour la norme N est bien une application linéaire de $E^{\mathbb{N}}_c$, comme on vient de le montrer.

Théorème 2.4 : convergence des suites extraites d'une suite convergente

Soit (E,N) un **K**-espace vectoriel normé (de dimension finie).

Si (x_n) est une suite d'éléments de E qui converge (pour la norme N) vers L, alors toute suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ de la suite converge encore vers L (pour la norme N).

Démonstration :

Soit donc (x_n) une suite d'éléments de E qui converge vers L pour la norme N et soit $(x_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (x_n) au moins d'une fonction φ (donc strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$).

En particulier, on vérifie immédiatement par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \leq \varphi(n)$.

Soit alors : $\varepsilon > 0$, et : $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geq n_0) \Rightarrow (N(x_n - L) \leq \varepsilon)$.

Alors : $\forall n \geq n_0$, $(n \geq n_0) \Rightarrow (\varphi(n) \geq n \geq n_0) \Rightarrow (N(x_{\varphi(n)} - L) \leq \varepsilon)$.

On constate bien que $(x_{\varphi(n)})$ converge vers L (pour la norme N).

Remarque :

On rappelle que c'est ainsi un moyen de montrer qu'une suite diverge en trouvant deux suites extraites convergeant vers des limites différentes.

Théorème 2.5 : (admis) convergence, caractère borné, limite d'une suite et changement de norme

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel **de dimension finie**.

Alors les notions de convergence d'une suite, limite d'une suite et le caractère borné d'une suite ne dépendent de la norme choisie dans l'espace pour les exprimer.

Remarques :

• La démonstration fait appel à la notion de « normes équivalentes », désormais hors programme en PSI ainsi qu'au théorème établissant que toutes les normes sont équivalentes dans un espace vectoriel de dimension finie (alors que ce n'est pas le cas en dimension quelconque), théorème dont la démonstration était déjà hors programme en PSI.
• Dorénavant, on n'aura donc plus besoin de préciser « pour la norme N » lorsqu'on parlera de convergence, de limite ou de suite bornée dans un espace vectoriel de dimension finie.
Attention : les boules (ouvertes ou fermées) et les sphères dépendent toujours de la norme choisie.

Théorème 2.6 : liens entre suite et suites coordonnées dans une base de l'espace

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension n, muni d'une base : $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

Soit (x_p) une suite d'éléments de E telle que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $x_p = \sum_{i=1}^{n} x_{i,p}.e_i$.

Alors la suite (x_p) converge dans E si et seulement si les n suites coordonnées $(x_{i,p})$ convergent dans **K**,

et dans ce cas, on a : $\lim_{p\to+\infty} (\sum_{i=1}^{n} x_{i,p}.e_i) = \sum_{i=1}^{n} (\lim_{p\to+\infty} x_{i,p}).e_i$.

De même, (x_p) est bornée si et seulement si ses suites coordonnées $(x_{i,p})$ sont bornées.

Démonstration :

• [⇒]

Si (x_p) converge vers : $L = \sum_{i=1}^{n} L_i.e_i$, pour la norme N_∞ attachée à la base $\mathscr{B}$, alors :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists p_0 \in \mathbb{N}$, $\forall p \geq p_0$, $\max_{1\leq i\leq n}(|x_{i,p} - L_i|) \leq \varepsilon$, et donc : $\forall 1 \leq i \leq n$, $|x_{i,p} - L_i| \leq \varepsilon$.

Donc toutes les suites $(x_{i,p})$ convergent respectivement vers L_i.

• [⇐]

Si chaque suite $(x_{i,p})$ converge vers L_i, alors : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists p_i \in \mathbb{N}$, $\forall p \geq p_i$, $|x_{i,p} - L_i| \leq \varepsilon$.

Il est alors clair que, en notant : $p_0 = \max(p_1, \dots, p_n)$, on a : $\forall p \geq p_0$, $N_\infty(x_p - L) \leq \varepsilon$, où on a noté : $L = \sum_{i=1}^{n} L_i . e_i$, puisque la norme infinie d'un élément de E est la plus grande de ses coordonnées dans $\mathscr{B}$, et qu'ici elles sont toutes majorées par ε, pour : $p \geq p_0$.

3. Topologie métrique élémentaire dans les espaces vectoriels de dimension finie.

On admettra que dans un espace vectoriel (normé) de dimension finie, les notions qui suivent sont indépendantes du choix de la norme (attention : une boule ou une sphère dépendent elles de la norme choisie dans l'espace).

Définition 3.1 : point intérieur à une partie dans un espace vectoriel normé, intérieur d'un ensemble

Soit (E,N) un espace vectoriel normé (de dimension finie) et A une partie quelconque de E.
On dit qu'un élément a de E est intérieur à A si et seulement si :

- $\exists\, r > 0$, $B(a,r) \subset A$.

L'ensemble des points intérieur à A (noté $\mathring{A}$) est appelé intérieur de A.

Définition 3.2 : ouvert ou partie ouverte d'un espace vectoriel normé

Soit (E,N) un espace vectoriel normé (de dimension finie).
On dit que Ω est un ouvert (ou une partie ouverte) de E pour la norme N si et seulement si :

- $\forall\, a \in \Omega$, $\exists\, r > 0$, $B(a,r) \subset \Omega$.

Remarques :

- Tout point a intérieur à Ω appartient donc à Ω puisque : $a \in B(a,r) \subset \Omega$.
- Un ensemble Ω est donc un ouvert de E si et seulement si Ω est égal à son intérieur : c'est immédiat avec les deux définitions précédentes.

Théorème 3.1 : exemple des boules ouvertes

Soit (E,N) un espace vectoriel normé (de dimension finie).
Alors : $\forall\, a \in E$, $\forall\, r > 0$, la boule ouverte B(a,r) est un ouvert.

Démonstration :

Soit : $x_0 \in B(a,r)$, et posons : $r' = r - N(x_0 - a) > 0$.

Alors : $\forall\, x \in B(x_0,r')$, $N(x-a) = N((x-x_0)+(x_0-a)) \leq N(x-x_0) + N(x_0-a) < r' + N(x_0-a) = r$,

et donc : $\forall\, x \in B(x_0,r')$, $x \in B(a,r)$, autrement dit : $B(x_0,r') \subset B(a,r)$.
Puisque : $\forall\, x_0 \in B(a,r)$, $\exists\, r' > 0$, $B(x_0,r') \subset B(a,r)$, la boule B(a,r) est donc bien un ouvert.

Définition 3.3 : point adhérent à une partie dans un espace vectoriel normé, adhérence

Soit (E,N) un espace vectoriel normé (de dimension finie) et A une partie quelconque de E.
On dit qu'un élément a de E est adhérent à A si et seulement si :

- $\forall\, r > 0$, $B(a,r) \cap A \neq \varnothing$.

L'ensemble des points adhérents à A (noté $\bar{A}$) est appelé adhérence de A.

Définition 3.4 : fermé ou partie fermée d'un espace vectoriel normé

Soit (E,N) un espace vectoriel normé (de dimension finie).
On dit que F est un fermé (ou une partie fermée) de E si et seulement si son complémentaire dans E est un ouvert de E.

Théorème 3.2 : exemple des boules fermées et des sphères

Soit (E,N) un espace vectoriel normé (de dimension finie).
Alors : $\forall\, a \in E$, $\forall\, r > 0$, la boule fermée B'(a,r) et la sphère S(a,r) sont des fermés.

Démonstration :

- Notons Ω le complémentaire de $B'_N(a,r)$ dans E, donc défini par : $\Omega = \{x \in E,\ N(x-a) > r\}$.

Soit : $x_0 \in \Omega$, et notons : $r' = N(x_0 - a) - r > 0$.

Alors : $\forall\, x \in B(x_0,r')$, $N(x_0-a) = N((x_0-x)+(x-a)) \leq N(x_0-x) + N(x-a) < r' + N(x-a)$, donc :

$N(x_0 - a) - r' < N(x - a)$, soit encore : $r < N(x - a)$, autrement dit : x ∈ Ω.

On vient donc de montrer que : ∀ x_0 ∈ Ω, ∃ r' > 0, $B(x_0,r')$ ⊂ Ω, et Ω est donc ouvert et $B'_N(a,r)$ un fermé.

• Si on note de même Ω' le complémentaire de $S_N(a,r)$ dans E, alors :

Ω' = {x ∈ E, $N(x - a) \neq r$} = {x ∈ E, $N(x - a) > r$} ∪ {x ∈ E, $N(x - a) < r$} = Ω ∪ B(a,r).

Or Ω et B(a,r) sont des ouverts donc :

- ∀ x_0 ∈ Ω, ∃ r' > 0, $B(x_0,r')$ ⊂ Ω ⊂ Ω',

- ∀ x_0 ∈ B(a,r), ∃ r' > 0, $B(x_0,r')$ ⊂ B(a,r) ⊂ Ω',

autrement dit : ∀ x_0 ∈ Ω', ∃ r' > 0, $B(x_0,r')$à ⊂ Ω', et Ω' est un ouvert de E donc $S_N(a,r)$ un fermé.

Théorème 3.3 : caractérisation séquentielle des points adhérents

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie, et A une partie de E.

Alors un élément x de E est adhérent à A si et seulement si il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.

Démonstration :

• [⇒]

Si x est adhérent à A, alors : ∀ n ∈ ℕ, $B(x,2^{-n})$ ∩ A ≠ ∅, et donc : ∃ x_n ∈ A, $N(x_n - x) < 2^{-n}$.

Il est clair que (x_n) est alors une suite d'éléments de A qui converge vers x.

• [⇐]

Si (x_n) est une suite d'éléments de A qui converge vers x, alors :

∀ ε > 0, ∃ n_ε ∈ ℕ, ∀ n ≥ n_ε, $N(x_n - x) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, et : B(x,ε) ∩ A ≠ ∅, car x_{n_ε} est dans cette intersection.

Remarque :

Tout point de A est dans Ā, puisque a est la limite de la suite (constante) d'éléments de A définie par :

∀ n ∈ ℕ, $a_n = a$,

autrement dit on a toujours : A ⊂ Ā.

Théorème 3.4 : caractérisation séquentielle des fermés

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie, et A une partie de E.

A est un fermé de E si et seulement si, pour tout suite d'éléments de A convergente, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \in A$.

Démonstration :

Travaillons par double implication et contraposées.

• [⇒]

Si A n'est pas fermé, en notant Ω son complémentaire dans E, Ω n'est pas ouvert et donc :

∃ a ∈ Ω, ∀ n ∈ ℕ, $B(a,2^{-n}) \not\subset$ Ω, donc : ∀ n ∈ ℕ, ∃ x_n ∈ $B(a,2^{-n})$ ∩ A.

La suite (x_n) est alors une suite d'éléments de A qui converge vers a, limite qui n'appartient pas à A.

• [⇐]

Si maintenant (x_n) est une suite d'éléments de A qui converge vers a n'appartenant pas à A donc au complémentaire Ω de A dans E, alors :

∀ r > 0, ∃ n ∈ ℕ, $N(x_n - a) \leq \frac{r}{2} < r$, puisque (x_n) tend vers a.

Mais alors : $B(a,\frac{r}{2}) \not\subset$ Ω, puisque cette boule contient x_n qui est dans A donc pas dans Ω.

Autrement dit Ω n'est pas ouvert à cause de a.

Remarque :

Un ensemble A est fermé si et seulement si il est égal à son adhérence.

En effet :

• si A est fermé, soit a un point de son adhérence.

Alors d'après le théorème 3.3, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a, mais d'après le théorème 3.4, a est alors dans A puisque A est fermé.

Donc : Ā ⊂ A, et comme on sait déjà que : A ⊂ Ā, on en déduit que : A = Ā.

• si : A = Ā, soit (a_n) une suite d'éléments de A, convergente vers a.

Le théorème 3.3 montre alors que : $a \in \bar{A}$, donc : $a \in A$, et le théorème 3.4 garantit que A est fermé.

Définition 3.5 : partie bornée d'un espace vectoriel normé

Soit (E,N) un espace vectoriel normé (de dimension finie) et A une partie quelconque de E.
On dit que A est bornée (pour la norme N) si et seulement si :

- $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in A, N(x) \le M$.

4. Limite d'une fonction entre espace vectoriels normés.

Définition 4.1 : limite en un point d'une fonction entre espaces vectoriels normés

Soient (E,N) et (F,N') deux **K**-espaces vectoriels normés de dimension finie.
Soit f une fonction définie d'une partie A de E dans F, et soit a un point adhérent à A.
On dit que f admet une limite en a si et seulement si :

$\exists L \in F, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, (N(x-a) \le \alpha) \Rightarrow (N'(f(x)-L) \le \varepsilon)$.

Théorème 4.1 : conséquences de l'existence d'une limite en un point

Soient (E,N) et (F,N') deux **K**-espaces vectoriels normés de dimension finie.
Soit f une fonction définie d'une partie A de E dans F, et soit a un point adhérent à A.
Si f admet pour limite L en a :

- cette limite est unique et on la note alors : $L = \lim_a f = \lim_{x \to a} f(x)$,
- si f est définie en A (soit encore : $a \in A$), alors : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$,
- il existe une boule B centrée en a telle que f soit bornée sur $B \cap A$.

Démonstration :

- Supposons que f admette deux limites distinctes L et L' en a.

Si on pose : $\varepsilon = \frac{1}{3}.N'(L-L')$, alors : $\exists \alpha > 0, \exists \alpha' > 0$, tel que :

$\forall x \in A, (N(x-a) \le \alpha) \Rightarrow (N'(f(x)-L) \le \varepsilon)$, et : $(N(x-a) \le \alpha') \Rightarrow (N'(f(x)-L') \le \varepsilon)$.

Puisque a est adhérent à A l'ensemble $A \cap B(a,\alpha'')$ est non vide, où : $\alpha'' = \min(\alpha, \alpha')$.

Soit alors : $x \in A \cap B(a,\alpha'')$.

On a : $N(x-a) \le \alpha'' \le \alpha$, et donc : $N'(f(x)-L) \le \varepsilon$, de même : $N'(f(x)-L') \le \varepsilon$.

Donc : $N(L-L') = N(L-f(x)+f(x)-L') \le N(L-f(x)) + N(f(x)-L') \le 2.\varepsilon = \frac{2}{3}.N(L-L'))$,

et ce dernier résultat est impossible.
Donc si f admet une limite L en a, cette limite est unique.

- Si f est définie en a et admet pour limite L en a, alors pour tout :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, (N(x-a) \le \alpha) \Rightarrow (N'(f(x)-L) \le \varepsilon)$.

Or a lui-même vérifie toujours : $N(a-a) = 0 \le \alpha$, et donc : $N'(f(a)-L) \le \varepsilon$.

Ceci étant vrai pour tout : $\varepsilon > 0$, on en déduit que : $f(a) = L = \lim_{x \to a} f(x)$.

- Soit maintenant : $\varepsilon = 1 > 0$, et notons : $L = \lim_a f$.

Alors : $\exists \alpha > 0, \forall x \in A \cap B(a,\alpha)$, $N'(f(x)-L) \le \varepsilon$, et donc :

$N'(f(x)) = N'(f(x)-L+L) \le N'(f(x)-L) + N(L) \le 1 + N(L) = M$,

et f est alors bien bornée sur $A \cap B(a,\alpha)$ par ce réel M.

Théorème 4.2 : caractérisation séquentielle de l'existence d'une limite

Soient (E,N) et (F,N') deux **K**-espaces vectoriels normés de dimension finie.
Soit f une fonction définie d'une partie A de E dans F, et soit a un point adhérent à A.
Il y a équivalence entre :

- f admet une limite en a,
- pour toute suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers a, la suite $(f(a_n))$ est convergente.

Si l'un des deux points est vérifié alors la fonction f admet une limite L en a qui est la limite commune de toutes les suites (a_n) évoquées au-dessus.

Démonstration :

• Supposons que f admette pour limite L en a, et soit (a_n) une suite d'éléments de A, convergente vers a.
Alors : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, (N(x-a) \leq \alpha) \Rightarrow (N'(f(x)-L) \leq \varepsilon)$.

Puisque (a_n) converge vers a, on peut trouver : $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0) \Rightarrow (N(a_n - a) \leq \alpha)$.

Pour : $n \geq n_0$, on a donc : $N(f(a_n)-L) \leq \varepsilon$, et on constate que $(f(a_n))$ converge bien (vers L).

• Supposons maintenant que pour toute suite d'éléments de A convergeant vers a, la suite $(f(a_n))$ converge et soient tout d'abord deux telles suites (x_n) et (y_n) (d'éléments de A convergeant vers a).
En posant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{2.n} = x_n$, et : $z_{2.n+1} = y_n$, on constate que (z_n) converge encore vers a.
Donc $(f(z_n))$ converge.
Mais les suites $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ étant extraites de $(f(z_n))$, elles doivent converger vers la même limite.
Notons alors L la limite commune de toutes les suites $(f(a_n))$ lorsque (a_n) est une suite d'éléments de A convergeant vers a.
Supposons alors que f n'admette pas L pour limite en a.
Alors : $\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in A$, tel que : $N(a_n - a) \leq \alpha$, et : $N'(f(x)-L) > \varepsilon$.

En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha = 2^{-n} > 0$, et : $\exists x_n \in A$, $N(x_n - a) \leq \alpha_n = 2^{-n}$, et : $N'(f(x_n)-L) > \varepsilon$.

On vient ainsi de construire une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers a et telle que $(f(x_n))$ ne converge pas vers L, ce qui est impossible, vu ce qu'on a démontré au-dessus.
Donc f admet bien pour limite L en a.

Remarques :

• Puisque la convergence d'une suite ne dépend pas (dans un espace vectoriel de dimension finie) du choix de la norme, il en résulte en particulier que l'existence d'une limite pour une fonction entre espaces vectoriels normés de dimensions finies ne dépend pas non plus du choix des normes dans ces espaces.
• On peut également noter que si on trouve deux suites convergeant vers a et telles que les suites images par f convergent vers des limites différentes, alors f n'a pas de limite en a.

Théorème 4.3 : utilisation d'une base de l'espace d'arrivée, fonctions composantes

Soient (E,+,.) et (F,+,.) deux **K**-espaces vectoriels de dimension finie.
Soit f une fonction définie d'une partie A de E dans F, et soit a un point adhérent à A.
On note : $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$, une base de F, et $(f_1, \ldots, f_n)$ les fonctions composantes de f dans la base $\mathcal{B}'$, c'est-à-dire : $f = \sum_{i=1}^{n} f_i.e_i'$.

Alors f admet une limite en a si et seulement si les fonctions f_i (à valeurs dans **K**) admettent des limites en a, et on a alors : $\lim_a f = \sum_{i=1}^{n} (\lim_a (f_i)).e_i'$.

En particulier, une fonction de A dans $\mathbb{C}$ qui s'écrit : $f = \mathrm{Re}(f) + i.\mathrm{Im}(f)$, où $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des fonctions de A dans $\mathbb{R}$, admet une limite en a si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ admettent des limites en a et alors : $\lim_a f = \lim_a \mathrm{Re}(f) + i.\lim_a \mathrm{Im}(f)$.

Démonstration :

On peut utiliser dans F n'importe quelle norme par exemple la norme infinie attachée à la base $\mathcal{B}'$.

• [⇒]

Si f admet une limite L en a : $L = \sum_{i=1}^{n} L_i.e_i'$, en remarquant que :

$\forall x \in A$, $\forall 1 \leq k \leq n$, $|f_k(x) - L_k| \leq N'_\infty(f(x)-L) = \max_{1\leq i\leq n} |f_i(x) - L_i|$,

il est immédiat que chaque fonction f_k admet pour limite L_k en a, puisque :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, (N(x-a) \leq \alpha) \Rightarrow (N'_\infty(f(x)-L) \leq \varepsilon$, et donc : $\forall 1 \leq k \leq n$, $|f_k(x) - L_k| \leq \varepsilon$.

• [⇐]

Si maintenant chaque fonction f_k admet pour limite L_k en a, alors :

$\forall 1 \leq k \leq n, \forall \varepsilon > 0, \forall \alpha_k > 0, \forall x \in A, (N(x-a) \leq \alpha_k) \Rightarrow (|f_k(x) - L_k| \leq \varepsilon)$,

et avec : $\alpha = \min_{1\leq k\leq n} \alpha_k > 0$, on a :

$\forall$ x $\in$ A, ($N(x-a) \le \alpha$) $\Rightarrow$ ($N'_\infty(f(x)-L) = \max_{1\le i\le n} |f_i(x)-L_i| \le \varepsilon$),

et f admet bien pour limite L en a.

Théorème 4.4 : limite d'une combinaison linéaire

Soient (E,+,.) et (F,+,.) deux **K**-espaces vectoriels de dimension finie.

Soient f et g des fonctions définies d'une partie A de E dans F, λ et μ des éléments de **K** et soit a un point adhérent à A.

Si f et g admettent des limites en a, alors $(\lambda.f+\mu.g)$ admet une limite en a et :

$\lim_a(\lambda.f+\mu.g) = \lambda.\lim_a f + \mu.\lim_a g$.

Démonstration :

Il suffit d'examiner les fonctions coordonnées de $(\lambda.f+\mu.g)$ dans une base $\mathscr{B}'$ de F qui sont combinaisons linéaires de celles de f et de g et qui à ce titre ont des limites en a et qui vérifient :

$\forall$ 1≤ i ≤ dim(F), $\lim_a(\lambda.f_i+\mu.g_i) = \lambda.\lim_a f_i + \mu.\lim_a g_i$.

On en déduit que $(\lambda.f+\mu.g)$ admet également une limite en a (avec le théorème 4.3) qui vérifie bien l'égalité annoncée.

Théorème 4.5 : limite d'une composée

Soient (E,+,.), (F,+,.), (G,+,.) trois **K**-espaces vectoriels de dimension finie.

Soit f une fonction définie d'une partie A de E dans B inclus dans F, g une fonction définie de B dans G et soit a un élément adhérent à A.

Si f admet une limite b en a, avec b adhérent à B, et si g admet une limite c en b, alors gof admet pour limite c en a.

Démonstration :

On note N, N' et N'' des normes dans E, F et G.

Pour : $\varepsilon > 0$, $\exists\ \alpha > 0$, $\forall$ y $\in$ B, ($N'(y-b) \le \alpha$) $\Rightarrow$ ($N''(g(y)-c) \le \varepsilon$).

Pour un tel α, on peut trouver : $\eta > 0$, tel que : $\forall$ x $\in$ A, ($N(x-a) \le \eta$) $\Rightarrow$ ($N'(f(x)-b) \le \alpha$).

Donc : $\forall$ x $\in$ A, ($N(x-a) \le \eta$) $\Rightarrow$ ($N'(f(x)-b) \le \alpha$), et : f(x) $\in$ B, donc : $N''(g(f(x))-c) \le \varepsilon$.

Autrement dit, gof admet bien pour limite c en a.

Théorème 4.6 : limite d'un produit et d'un quotient de fonctions réelles de variable vectorielle

Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie.

Soient f et g deux fonctions d'une partie A de E dans **K**, et soit a un élément adhérent à A.

Si f et g admettent des limites en a, alors $(f.g)$ admet une limite en a et : $\lim_a(f.g) = \lim_a f.\lim_a g$.

De plus, si la limite de g en a est non nulle, alors il existe une boule ouverte B centrée en a telle que g ne s'annule pas sur A $\cap$ B, et la fonction $\frac{f}{g}$ admet une limite en a telle que : $\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$.

Démonstration :

- Si on note L et L' les limites respectives de f et de g en a, alors :

$\forall$ x $\in$ A, $|f(x).g(x)-L.L'| = |f(x).(g(x)-L')+(f(x)-L).L'| \le |f(x)|.|g(x)-L'| + |f(x)-L|.|L'|$.

Fixons maintenant : $\varepsilon > 0$.

Le théorème 4.1 garantit l'existence de : r > 0, et : M ≥ 0, tels que : $\forall$ x $\in$ A $\cap$ B(a,r), $|f(x)| \le M$.

De plus :

- $\exists\ \alpha > 0$, $\forall$ x $\in$ A, ($N(x-a) \le \alpha$) $\Rightarrow$ ($|f(x)-L| \le \frac{\varepsilon}{2.(|L'|+1)}$), et :

- $\exists\ \alpha' > 0$, $\forall$ x $\in$ A, ($N(x-a) \le \alpha'$) $\Rightarrow$ ($|g(x)-L'| \le \frac{\varepsilon}{2.(M+1)}$),

Donc en posant : $\alpha'' = \min(\alpha, \alpha', r)$, on a donc :

$\forall$ x $\in$ A, ($N(x-a) \le \alpha''$) $\Rightarrow$ ($|f(x).g(x)-L.L'| \le M.\frac{\varepsilon}{2.(M+1)} + |L'|.\frac{\varepsilon}{2.(|L'|+1)} \le \varepsilon$), et $(f.g)$ admet bien pour limite L.L' en a.

• Notons à nouveau L' la limite de g en a et supposons : L' ≠ 0.

Alors si on note : $\varepsilon = \frac{1}{2}.|L'| > 0$, on peut trouver : α > 0, tel que :

∀ x ∈ A, ($N(x-a) \leq \alpha$) ⇒ ($|g(x) - L'| \leq \varepsilon$), et donc avec la deuxième inégalité triangulaire sur le module, on obtient : $\left||g(x)| - |L'|\right| \leq |g(x) - L'| \leq \varepsilon$, et donc : $-\varepsilon + |L'| \leq |g(x)|$, soit : $0 < \frac{1}{2}.|L'| \leq |g(x)|$.

On a ainsi montré que g ne s'annule pas sur A ∩ B(a,α).

Enfin, par composition de g et de la fonction inverse de ℂ* dans ℂ*, la fonction $\frac{1}{g}$ est définie sur A ∩ B et admet pour limite $\frac{1}{\lim\limits_a g}$ en a.

Enfin, par produit, $\frac{f}{g}$ admet pour limite $\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ en a.

5. Continuité.

Définition 5.1 : continuité en un point, continuité d'une fonction entre espaces vectoriels normés

Soient (E,+,.) et (F,+,.) deux **K**-espaces vectoriels de dimension finie.
Soit f une fonction définie d'une partie A de E dans F.
• Pour : a ∈ A, on dit que f est continue en a si et seulement si f admet une limite en a (qui est donc f(a)).
• On dit que f est continue sur A si et seulement si f est continue en tout point de A.

Théorème 5.1 : utilisation d'une base de l'espace d'arrivée, fonctions composantes

Soient (E,+,.) et (F,+,.) deux **K**-espaces vectoriels de dimension finie.
Soit f une fonction définie d'une partie A de E dans F, et soit : a ∈ A.
On note : $\mathscr{B}'$ = (e'_1, …, e'_n), une base de F, et (f_1, …, f_n) les fonctions composantes de f dans la base $\mathscr{B}'$, c'est-à-dire : $f = \sum_{i=1}^{n} f_i.e_i'$.
Alors f est continue en a si et seulement si les fonctions f_i (à valeurs dans **K**) sont continues en a.
De même f est continue sur A si et seulement si les fonctions f_i sont continues sur A.

Démonstration :

C'est une conséquence immédiate du théorème 4.3.

Théorème 5.2 : opérations sur les fonctions continues

• Soient (E,+,.) et (F,+,.) deux **K**-espaces vectoriels de dimension finie.
Soient f et g des fonctions définies d'une partie A de E dans F, λ et μ des éléments de **K**..
Si f et g sont continues en : a ∈ A, (ou continues sur A), $(\lambda.f + \mu.g)$ est continue en a (ou sur A).
• Soient (E,+,.), (F,+,.), (G,+,.) trois **K**-espaces vectoriels de dimension finie.
Soient f une fonction définie d'une partie A de E dans : B ⊂ F, g une fonction définie de B dans G.
Si f est continue en : a ∈ A, (ou sur A) et si g est continue en : b = f(a) ∈ B, (ou sur B), alors gof est continue en a (ou sur A).
• Soit (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie.
Soient f et g deux fonctions d'une partie A de E dans **K**.
Si f et g sont continues en : a ∈ A, (ou sur A), alors $(f.g)$ est continue en a (ou sur A).
De plus, si g ne s'annule pas en : a ∈ A, (ou sur A), alors $\frac{f}{g}$ est définie au voisinage de a et $\frac{f}{g}$ est continue en a (ou sur A).

Démonstration :

C'est une conséquence immédiate des théorèmes 4.4, 4.5 et 4.6.

Théorème 5.3 : (admise pour le troisième point) continuité et topologie

Soient (E,+,.) un **K**-espace vectoriel de dimension finie et f une fonction continue de E dans ℝ.
Alors :
- les ensembles $\{x \in E,\ f(x) > 0\}$, $\{x \in E,\ f(x) < 0\}$ et $\{x \in E,\ f(x) \neq 0\}$ sont des ouverts de E,
- les ensembles $\{x \in E,\ f(x) \geq 0\}$, $\{x \in E,\ f(x) \leq 0\}$ et $\{x \in E,\ f(x) = 0\}$ sont des fermés de E.
- si A est une partie fermée et bornée de E, f est bornée sur A et y atteint ses bornes.

Démonstration : (admise pour le troisième point)

- Notons : $\Omega = \{x \in E,\ f(x) > 0\}$, et soit : $a \in \Omega$, donc tel que : f(a) > 0.

Puisque f est continue en a, en notant : $\varepsilon = \frac{f(a)}{2} > 0$, on peut trouver : α > 0, tel que :

$\forall x \in E$, $(N(x-a) \leq \alpha) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon) \Rightarrow (f(a) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(a) + \varepsilon)$.

Donc : $\forall x \in E$, on a : $(N(x-a) < \alpha) \Rightarrow (N(x-a) \leq \alpha) \Rightarrow (0 < \frac{f(a)}{2} = f(a) - \frac{f(a)}{2} \leq f(x)) \Rightarrow (x \in \Omega)$.

Donc : $B(a,\alpha) \subset \Omega$, et Ω est bien un ouvert de E.
On montre de même que les deux autres ensembles proposés sont encore des ouverts de E.

- Notons maintenant : $F = \{x \in E,\ f(x) \geq 0\}$, et soit (a_n) une suite d'éléments de F, convergeant vers a.

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) \geq 0$, et le théorème 4.2 montre que la suite $(f(a_n))$ converge vers f(a) puisque f est continue en a (et donc f admet une limite en a égale à f(a)).
En passant à la limite dans la famille d'inégalités précédentes, on en déduit que : $f(a) \geq 0$, et : $a \in F$.
F est donc bien un fermé de E et on montre de la même façon que les deux autres ensembles sont encore des fermés de E.

- Soit maintenant A une partie fermée et bornée de E et supposons f non bornée sur A.

Alors on peut trouver une suite (a_n) d'éléments de A telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f(a_n)| > n$, puisque n n'est jamais un majorant de f sur A.

Considérons alors une base : $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$, de E, et notons : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum_{i=1}^{p} a_{i,n}.e_i$.

Puisque A est bornée, on a en utilisant la norme infinie attachée à $\mathscr{B}$:

$\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall x \in A$, $N_\infty(x) \leq M$, et en particulier : $\forall 1 \leq i \leq p$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_{i,n}| \leq N_\infty(a_n) \leq M$.

Puisque $(a_{1,n})$ est une suite bornée de réels (ou de complexes), on peut en extraire une suite convergente $(a_{1,\varphi(n)})$.
Mais la suite $(a_{2,\varphi(n)})$ est elle-même bornée et on peut à nouveau en extraire une suite convergente $(a_{2,\varphi o\psi(n)})$, la suite $(a_{1,\varphi o\psi(n)})$ restant convergente car extraite de $(a_{1,\varphi(n)})$, elle-même convergente.
On continue ainsi à extraire jusqu'à l'indice p des suites convergentes des suites construites précédemment et on aboutit à une fonction extractrice θ telle que : $\forall 1 \leq i \leq p$, $(a_{i,\theta(n)})$ converge.
La suite vectorielle $(a_{\theta(n)})$ est alors convergente (puisque ses suites coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ le sont) et en notant a sa limite, on a : $a \in A$, car A est fermée.
Or : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f(a_{\theta(n)})| > \theta(n) \geq n$, puisque θ est strictement croissante.
Et comme il existe une suite d'éléments de A, qui converge vers a, et telle que la suite des images diverge (puisque cette suite d'images tend en norme vers +∞ et n'est donc pas bornée), f ne peut avoir de limite en a, et a fortiori ne peut être continue en a.
Conclusion : l'hypothèse faite est fausse et f est bornée sur A ; notons alors : $M = \sup_{x \in A} f(x)$.

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in A$, $M - 2^{-n} \leq f(x_n) \leq M$, puisque M est le plus petit des majorants de f sur A et que $(M - 2^{-n})$ ne majore jamais f sur A.
Comme précédemment, on peut extraire de (x_n) une suite $(x_{\beta(n)})$ convergente dans A vers un élément x et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M - 2^{-\beta(n)} \leq f(x_{\beta(n)}) \leq M$.

β étant à nouveau une fonction strictement croissante, on a : $\lim_{n \to +\infty} \beta(n) = +\infty$, et le théorème des gendarmes montre que : $\lim_{x \to +\infty} f(x_{\beta(n)}) = M$,

Mais puisque $(x_{\beta(n)})$ converge vers x et que f est continue en x, on a aussi : $\lim_{x \to +\infty} f(x_{\beta(n)}) = f(x)$, et donc

finalement : $f(x) = M$.
De même, on montre que f admet une borne inférieure, atteinte également en au moins un point de A.

Définition 5.2 : fonction lipschitzienne
Soient (E,N) et (F,N') des espaces vectoriels normés de dimension finie et soit f de E dans F.
On dit que f est lipschitzienne de (E,N) dans (F,N') si et seulement si :
$\exists$ k $\in \mathbb{R}^+$, $\forall$ (x,y) $\in$ E^2, $N'(f(x) - f(y)) \leq k.N(x-y)$.
Cette notion est indépendante des normes si E et F sont de dimension finie, mais le coefficient k dépend du choix des normes dans E et F (on parle alors d'application k-lipschitzienne).

Remarques :
- Si k est une constante qui convient, toute valeur supérieure convient également,
- Une combinaison linéaire de fonctions lipschitziennes est encore lipschitzienne,
- Une composée de fonctions lipschitziennes est encore lipschitzienne.

Théorème 5.4 : continuité des fonctions lipschitziennes
Soient (E,N) et (F,N') des espaces vectoriels normés de dimension finie et soit f k-lipschitzienne de E dans F.
Alors f est continue sur E.

Démonstration :
Soit : a $\in$ E, et soit : $\varepsilon > 0$.
Alors en posant : $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{k+1} > 0$, on constate que :
$\forall$ x $\in$ E, $(N(x-a) \leq \alpha) \Rightarrow (N'(f(x) - f(a)) \leq k.N(x-a) \leq k.\dfrac{\varepsilon}{k+1} \leq \varepsilon)$,
et f est bien continue en a donc sur E.

Théorème 5.5 : continuité des applications linéaires entre espaces vectoriels de dimension finie
Soient (E,N) et (F,N') des espaces vectoriels normés de dimension finie et soit : u $\in \mathscr{L}$(E,F).
Alors u est lipschitzienne de E dans F donc continue.

Démonstration :
Soit $\mathscr{B}$ une base de E, et notons N_∞ la norme infinie attachée à la base $\mathscr{B}$ et N' une norme de F.
Alors : $\forall$ x $\in$ E, $N'(u(x)) = N'\left(u\left(\sum_{i=1}^{p} x_i.e'_i\right)\right) = N'\left(\sum_{i=1}^{p} x_i.u(e'_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{p} |x_i|.N'(u(e'_i)) \leq N_\infty(x).C$,
où on a noté : $C = \sum_{i=1}^{p} N'(u(e'_i)) \geq 0$, (et même non nulle).
Donc : $\forall$ (x,y) $\in$ E^2, $N'(u(x) - u(y)) = N'(u(x-y)) \leq C.N_\infty(x-y)$.
Autrement dit u est C-lipschitzienne pour les normes N_∞ et N' et donc continue de E dans F.

Exemples 5.1 :
- Les applications coordonnées dans une base d'un **K**-espace vectoriel de dimension finie sont continues.
- Des applications polynomiales en les coordonnées d'un vecteur dans une base sur un **K**-espace vectoriel de dimension finie sont continues (de même que des applications rationnelles sur leur domaine de définition).
- L'application déterminant est continue de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

L'ensemble $Gl_n(\mathbb{R})$ des matrices réelles inversibles est donc un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration :
En effet :
- Soit : $\mathscr{B}$ =(e_1, …, e_n), une base de, **K**-espace vectoriel de dimension finie.

Alors si pour x dans E, on note : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i$, les applications définies par :

$\forall\ 1 \leq i \leq n$, $x \mapsto x_i$, sont linéaires de E dans **K** donc continues.
• De même, si f définie sur E par le fait que, pour : $x \in E$, f(x) est un polynôme en $x_1, \ldots, x_n$, alors f apparaît comme une somme de produits de fonctions continues de E dans **K** (les fonctions précédentes) et à ce titre, f est continue sur E.
Le même résultat vaut pour une fonction rationnelle en les coordonnées d'un vecteur.
• Pour : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, alors en développant successivement $\det(A)$ suivant les colonnes de la matrice (soit en tout n! termes à la fin), on constate que $\det(A)$ apparaît comme une somme de produits (avec des signes ±) de coefficients de la matrice A, autrement dit det est une somme de produits de fonctions coordonnées dans la base canonique.
A ce titre, det est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
On en déduit que : $Gl_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(A) \neq 0\}$, est donc un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.