Séries entières.

Chap. 09 : cours complet.

1. Rayon de convergence et somme d'une série entière.

2. Propriétés de la somme d'une série entière.

3. Fonctions développables en série entière, développement de fonctions en série entière.

Séries entières.

1. Rayon de convergence et somme d'une série entière.

Définition 1.1 : série entière réelle ou complexe

On appelle série entière une série de fonctions $\sum u_n$ de variable réelle x avec :

$\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $\forall$ x $\in$ $\mathbb{R}$, $u_n(x) = a_n.x^n$, où : $a_n \in \mathbb{C}$,

ou une série de fonctions $\sum u_n$ de variable complexe z avec :

$\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $\forall$ z $\in$ $\mathbb{C}$, $u_n(z) = a_n.z^n$, où : $a_n \in \mathbb{C}$.

Une série entière est par convention notée $\sum a_n.x^n$, ou $\sum a_n.z^n$.

Théorème 1.1 : lemme d'Abel

Soit $\sum a_n.z^n$ une série entière.

Soit : $\rho > 0$, tel que la suite $(|a_n|.\rho^n)$ soit bornée.

Alors : $\forall$ z $\in$ $\mathbb{C}$, $(|z| < \rho) \Rightarrow$ ($\sum a_n.z^n$ converge absolument).

Démonstration :

Soit donc : z $\in$ $\mathbb{C}$, $|z| < \rho$.

Si on désigne par M un majorant de la suite $(|a_n|.\rho^n)$, alors : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $\left|a_n.z^n\right| = \left|a_n.\rho^n\right|.\dfrac{|z|^n}{\rho^n} \leq M.\left(\dfrac{|z|}{\rho}\right)^n$.

Le terme général de la série $\sum a_n.|z|^n$ est alors majoré par celui d'une série géométrique convergente, puisque : $0 \leq \dfrac{|z|}{\rho} < 1$, et donc la série $\sum a_n.z^n$ est absolument convergente.

Théorème 1.2 : intervalle des valeurs positives où une série entière a son terme général borné

Soit $\sum a_n.z^n$ une série entière.

L'ensemble : $E_1 = \{\rho \in \mathbb{R}^+, (a_n.\rho^n) \text{ bornée}\}$, est un intervalle du type [0,R] ou [0,R[, avec :
R $\in$ $\mathbb{R}$, ou : R = +∞.

Démonstration :

Il est clair pour commencer que E_1 contient 0.

- Si E_1 est majoré, il admet une borne supérieure (puisqu'il est de plus non vide) qu'on peut noter : R $\geq$ 0.
On a alors : $\forall$ $\rho \in E_1$, $0 \leq \rho \leq R$, et : $E_1 \subset [0,R]$.

• Si R appartient à E_1, alors $(a_n.R^n)$ est bornée, donc ($\left|a_n\right|.R^n$) aussi (par exemple par M), donc :

$\forall$ $0 \leq \rho < R$, $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $\left|a_n\right|.\rho^n \leq \left|a_n\right|.R^n \leq M$, et la suite $(a_n.\rho^n)$ est bornée, donc : $\rho \in E_1$.

Autrement dit, dans ce cas, on a aussi : $[0,R] \subset E_1$, d'où finalement : $[0,R] = E_1$.

• Si R n'appartient pas à E_1, alors pour tout : $0 \leq \rho < R$, il existe : $\rho' \in E_1$, avec : $\rho < \rho' < R$, puisque R étant le plus petit des majorants de E_1, ρ n'est pas un majorant de E_1.

Mais alors $(a_n.\rho'^n)$ est bornée, et comme précédemment : $\rho \in E_1$.

Autrement dit dans ce cas, on a : $[0,R[\subset E_1$, et comme : $E_1 \subset [0,R]$, et : $R \notin E_1$, finalement : $E_1 = [0,R[$.

- Si maintenant E_1 n'est pas majoré, alors pour tout : $0 \leq \rho$, il existe : $\rho' \in E_1$, avec : $\rho < \rho'$, et là encore on en déduit que : $\rho \in E_1$.

Finalement dans ce dernier car : $\mathbb{R}^+ \subset E_1 \subset \mathbb{R}^+$, d'où : $E_1 = \mathbb{R}^+ = [0,+\infty)$.

Définition 1.2 : rayon de convergence (première définition)

Soit $\sum a_n.z^n$ une série entière.

On appelle rayon de convergence de la série entière : $R = \sup\{\rho \in \mathbb{R}^+, (a_n.\rho^n) \text{ bornée}\}$.

R est donc un réel positif ou vaut +∞.

Théorème 1.3 : autres définitions du rayon de convergence

Soit $\sum a_n.z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

On définit les quatre ensembles :

$E_1 = \{\rho \in \mathbb{R}^+, (a_n.\rho^n) \text{ bornée}\}$,

$E_2 = \{\rho \in \mathbb{R}^+, (a_n.\rho^n) \text{ tend vers } 0\}$,

$E_3 = \{\rho \in \mathbb{R}^+, \sum a_n.\rho^n \text{ converge}\}$,

$E_4 = \{\rho \in \mathbb{R}^+, \sum a_n.\rho^n \text{ est absolument convergente}\}$.

Alors : $[0,R[\subset E_4 \subset E_3 \subset E_2 \subset E_1 \subset [0,R]$, et R est la borne supérieure de ces quatre ensembles.

Démonstration :

Vu les résultats classiques sur les séries numériques, il est clair que : $E_4 \subset E_3 \subset E_2 \subset E_1$.
Par ailleurs, on a vu dans la démonstration précédente que : $E_1 \subset [0,R]$.
Soit maintenant : $0 \leq \rho < R$.
Puisque R est la borne supérieur de E_1, on peut trouver : $\rho' \in E_1$, tel que : $\rho < \rho' < R$.
Or la suite $(a_n.\rho'^n)$ est alors bornée, tout comme $(|a_n|.\rho'^n)$.

Le lemme d'Abel garantit alors que la série $\sum a_n.\rho^n$ est absolument convergente, donc : $\rho \in E_4$.

On a donc établi que : $[0,R[\subset E_4$.
Enfin, si R est infini, les quatre ensemble ont comme borne supérieure $+\infty$, sinon ils sont bornés tous les quatre et admettent la même borne supérieure finie R.

Théorème 1.4 : diverses propriétés de convergence liées au rayon de convergence

Soit $\sum a_n.z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

- il y a absolue convergence pour : $|z| < R$, et divergence grossière si : $|z| > R$.
- s'il existe : $z \in \mathbb{C}$, tel que $\sum a_n.z^n$ converge (ou converge absolument) ou tel que la suite $(a_n.z^n)$ soit bornée (ou tende vers 0) alors : $R \geq |z|$.
- s'il existe : $z \in \mathbb{C}$, tel que $\sum a_n.z^n$ diverge (ou diverge absolument) ou tel que la suite $(a_n.z^n)$ soit non bornée (ou ne tende pas vers 0) alors : $R \leq |z|$.

Démonstration :

C'est une conséquence immédiate de ce qui précède :

• si : $|z| < R$, $\exists \rho \in E_1$, $0 < |z| < \rho$, et la suite $(|a_n|.\rho^n)$ étant bornée, le lemme d'Abel garantit la convergence absolue de $\sum a_n.z^n$.

• Si : $|z| > R$, alors : $|z| \notin E_1$, et la suite $(|a_n|.|z|^n)$ n'est pas bornée donc la suite $(a_n.z^n)$ ne tend pas vers 0, et la série $\sum a_n.z^n$ diverge grossièrement.

• S'il existe : $z \in \mathbb{C}$, tel que $\sum a_n.z^n$ converge (ou converge absolument) ou tel que la suite $(a_n.z^n)$ soit bornée (ou tende vers 0), alors : $|z| \in E_3$, (ou : $|z| \in E_4$), ou : $|z| \in E_1$, (ou : $|z| \in E_2$), et dans tous les cas : $|z| \leq R$, du fait du théorème précédent.
• Dans ce dernier cas, alors $|z|$ n'appartient pas à au moins l'un des quatre ensembles et : $|z| \notin [0,R[$.
Donc dans ce cas : $|z| \geq R$.

Définition 1.3 : somme d'une série entière, disque ouvert et intervalle ouvert de convergence

Soit $\sum a_n.z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

L'ensemble :

$D = \{ z \in \mathbb{C}, |z| < R\} = B(0,R)$, dans le cas d'une variable complexe, et :

$I = \{x \in \mathbb{R}, |x| < R\} =]-R,+R[$, dans le cas d'une variable réelle,

sont appelés respectivement disque ouvert et intervalle ouvert de convergence pour la série entière.
La série entière converge absolument pour tout élément de ces ensembles (et éventuellement au bord) et on appelle somme de la série entière la fonction S définie par :

$\forall z \in D$, $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.z^n$, dans le cas complexe, et : $\forall x \in I$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n$, dans le cas réel.

Théorème 1.5 : séries somme et produit par un scalaire de séries entières

Soient $\sum a_n.z^n$, $\sum b_n.z^n$, des séries entières, et : $\lambda \in \mathbf{K}$.

On note R_a et R_b leur rayon de convergence respectif.

On définit par ailleurs les séries $\sum s_n.z^n$ et $\sum p_n.z^n$ par :

$\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $s_n = a_n + b_n$, et : $p_n = \lambda.a_n$,
en notant R_s et R_p leur rayon de convergence respectif.

Pour la série entière $\sum s_n.z^n$, on a alors :

- si : $R_a \neq R_b$, $R_s = \min(R_a, R_b)$,
- si : $R_a = R_b$, $R_s \geq R_a$ (ou R_b).

Pour la série entière $\sum p_n.z^n$, on a par ailleurs :

- si : $\lambda \neq 0$, $R_p = R_a$,
- si : $\lambda = 0$, $R_p = +\infty$.

Démonstration :

- Pour la série $\sum s_n.z^n$:

Si : $R_a = R_b$, on a : $\forall$ z $\in \mathbb{C}$, $|z| < R_a$ (ou R_b), $\sum a_n.z^n$ et $\sum b_n.z^n$ convergent absolument, donc $\sum s_n.z^n$ converge, comme somme de deux séries convergentes.

Dans ce cas : $|z| \leq R_s$, et donc : $[0,R_a[\subset [0, R_s]$, soit : $R_s \geq R_a$.

Si : $R_a \neq R_b$, par exemple : $R_a < R_b$, alors de même que précédemment : $\forall$ z $\in \mathbb{C}$, $|z| < R_a$, $\sum a_n.z^n$ et $\sum b_n.z^n$ convergent absolument, donc $\sum s_n.z^n$ converge, comme somme de deux séries convergentes.

Là encore : $[0,R_a[\subset [0, R_s]$, soit : $R_s \geq R_a$.

Mais de plus : $\forall$ z $\in \mathbb{C}$, $R_a < |z| < R_b$, $\sum a_n.z^n$ diverge et $\sum b_n.z^n$ converge, donc $\sum s_n.z^n$ diverge comme somme d'une série convergente et d'une série divergente.

On en déduit que : $]R_a,R_b[\subset [R_s,+\infty)$, et : $R_s \leq R_a$, soit finalement : $R_s = R_a = \min(R_a, R_b)$.

- Pour la série $\sum p_n.z^n$:

Si : $\lambda = 0$, la série étant la série nulle, elle converge sur $\mathbb{C}$, et : $R_p = +\infty$.

Si : $\lambda \neq 0$, l'équivalence : $\forall$ z $\in \mathbb{C}$, ($\sum a_n.z^n$ converge) $\Leftrightarrow$ ($\sum p_n.z^n$ converge), entraîne que : $R_p = R_a$.

Théorème 1.6 : utilisation de relations de comparaison

Soit $\sum a_n.z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Alors :

- ($\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall$ n $\geq n_0$, $|a_n| \leq |b_n|$) $\Rightarrow$ ($R_a \geq R_b$),

et plus généralement :

- ($\exists$ $\alpha \in \mathbb{R}$, $\exists$ k > 0, $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall$ n $\geq n_0$, $|a_n| \leq k.|b_n|.n^\alpha$) $\Rightarrow$ ($R_a \geq R_b$),
- ($\exists$ $\alpha \in \mathbb{R}$, $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n.n^\alpha$) $\Rightarrow$ ($R_a = R_b$),

et en particulier :

- ($a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$) $\Rightarrow$ ($R_a = R_b$).

Démonstration :

- Dans ce premier cas, il est immédiat que : $\forall$ z $\in \mathbb{C}$, $\forall$ n $\geq n_0$, $|a_n|.|z|^n \leq |b_n|.|z|^n$.

Donc : $\forall$ z $\in \mathbb{C}$, ($|z| < R_b$) $\Rightarrow$ (absolue convergence de $\sum b_n.z^n$) $\Rightarrow$ (absolue convergence de $\sum a_n.z^n$), et donc : $\forall$ z $\in \mathbb{C}$, ($|z| < R_b$) $\Rightarrow$ ($|z| < R_a$).

D'où : $[0,R_b[\subset [0,R_a[$, et : $R_a \geq R_b$.

- De même : $\forall$ z $\in \mathbb{C}$, $\forall$ n $\geq n_0$, $|a_n|.|z|^n \leq |b_n|.|z|^n.k.n^\alpha$.

Donc : $\forall$ z $\in \mathbb{C}$, ($|z| < R_b$) $\Rightarrow$ ($\exists$ $\rho \in \mathbb{R}$, $|z| < \rho < R_b$), et donc, en notant : $x = \dfrac{|z|}{\rho}$, on a : $0 \leq x < 1$, et :

$\forall$ n $\geq n_0$, ($|a_n|.|z|^n = |a_n|.\rho^n.x^n \leq |b_n|.|\rho|^n.[k.n^\alpha.x^n]$.

Or, d'après le théorème des croissances comparées, ($k.n^\alpha.x^n$) tend vers 0, donc constitue une suite bornée (par M par exemple), et : $\forall$ n $\geq n_0$, ($|a_n|.|z|^n \leq |b_n|.|\rho|^n.M$).

D'où : $\forall$ z $\in$ $\mathbb{C}$, (|z| < R_b), la série $\sum b_n.z^n$ est absolument convergente, tout comme $\sum M.b_n.z^n$, et donc aussi $\sum a_n.z^n$.

Finalement : $\forall$ z $\in$ $\mathbb{C}$, (|z| < R_b) $\Rightarrow$ (|z| < R_a), puis : $[0,R_b[\subset [0,R_a[$, et : $R_a \geq R_b$.

• Dans ce troisième point, puisque : $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n.n^\alpha$, entraîne : $|a_n| = |b_n|.n^\alpha.(1 + \varepsilon_n)$, avec : $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$, on en déduit que : $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall$ n $\geq n_0$, $|a_n| = 2.|b_n|.n^\alpha$, et donc que : $R_a \geq R_b$.

Mais on a aussi : $b_n \underset{+\infty}{\sim} a_n.n^{-\alpha}$, et en application de ce qu'on vient d'obtenir, on en déduit : $R_b \geq R_a$.

Finalement : $R_a = R_b$.

• Enfin ce quatrième point correspond au troisième dans le cas particulier : $\alpha = 0$.

Théorème 1.7 : utilisation de la règle de d'Alembert pour les séries entières

Soit $\sum a_n.z^n$ une série entière, telle que : $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall$ n $\geq n_0$, $a_n \neq 0$.

Pour x non nul, si la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}.x^{n+1}}{a_n.x^n}\right|\right)_{n\geq n_0}$ converge vers L.|x| (ou $+\infty$), alors :

- la série converge absolument pour : L.|x| < 1,
- la série diverge grossièrement pour : L.|x| > 1.

Remarque :

Le rayon de convergence R_a de la série $\sum a_n.z^n$ vaut donc : $R_a = \frac{1}{L}$ (0, si : L = $+\infty$, et $+\infty$ si : L = 0).

Démonstration :

Soit : z $\in$ $\mathbb{C}$, z $\neq$ 0.

Alors : $\forall$ n $\geq n_0$, $\left|\frac{a_{n+1}.z^{n+1}}{a_n.z^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.|z|$, et donc la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}.z^{n+1}}{a_n.z^n}\right|\right)_{n\geq n_0}$ tend vers L.|z| (ou vers $+\infty$ dans le cas où L est infini).

Si L est nul, le critère de d'Alembert pour les séries numériques garantit alors que la série $\sum a_n.z^n$ converge pour tout : z $\in$ $\mathbb{C}$, soit : $R_a = +\infty$.

Si L est infini, ce même critère montre que la série ne converge que pour z nul (c'est la série nulle), et : $R_a = 0$,

Si : L $\in$ $\mathbb{R}^{+*}$, il y a garantie de convergence pour : L.|z| < 1, et garantie de divergence pour : L.|z| > 1.

Donc : $R_a = \frac{1}{L}$.

Théorème 1.8 : série produit au sens de Cauchy de deux séries entières

Soient $\sum a_n.z^n$, $\sum b_n.z^n$, des séries entières, et : $\lambda \in \mathbf{K}$.

On note R_a et R_b leurs rayons de convergence respectifs.

On définit par ailleurs la série produit au sens de Cauchy des deux séries entières $\sum c_n.z^n$, par :

- $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $c_n = \sum\limits_{p+q=n} a_p.b_q$.

Alors le rayon de convergence R_c de cette série produit vérifie : $R_c \geq \min(R_a,R_b)$.

Démonstration :

Puisqu'on a vu que lorsque deux séries sont absolument convergente, leur produit de Cauchy l'est aussi, on en déduit que : $\forall$ z $\in$ $\mathbb{C}$, |z| < $\min(R_a,R_b)$, $\sum a_n.z^n$ et $\sum b_n.z^n$ sont absolument convergente, donc $\sum c_n.z^n$ converge aussi.

Donc : $R_c \geq \min(R_a,R_b)$.

Exemple 1.9 : la série exponentielle complexe

La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini, sa somme pour z complexe donné est notée exp(z), et la fonction exp vérifie : $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$, exp(z).exp(z') = exp(z + z').

Démonstration :

Pour le rayon de convergence de cette série, on peut utiliser la règle de d'Alembert :

$\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\forall n \geq 0$, $a_n = \frac{1}{n!} \neq 0$, et : $\left|\frac{a_{n+1}.z^{n+1}}{a_n.z^n}\right| = \frac{|z|}{n+1}$, et cette suite tend vers 0 en $+\infty$, donc le rayon de convergence de la série entière est $+\infty$.

Puis : $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$, $\sum \frac{z^n}{n!}$ et $\sum \frac{z'^n}{n!}$ sont absolument convergentes donc leur produit de Cauchy est convergent et on a de plus : $\exp(z).\exp(z') = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right).\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z'^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$, avec :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{p+q=n} \frac{z^p}{p!}.\frac{z'^q}{q!} = \sum_{p+q=n} \frac{1}{(p+q)!}.\binom{p}{p+q}.z^p.z'^q = \frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n}\binom{p}{n}.z^p.z'^{n-p} = \frac{(z+z')^n}{n!}$.

Donc : $\exp(z).\exp(z') = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+z')^n}{n!} = \exp(z+z')$.

2. Propriétés de la somme d'une série entière.

Théorème 2.1 : convergence normale sur tout compact inclus dans la zone ouverte de convergence

Soit $\sum a_n.z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

La série converge alors normalement sur tout compact inclus dans le disque ouvert de convergence (cas d'une variable complexe) ou l'intervalle ouvert de convergence (cas d'une variable réelle).
Dans le cas d'une variable réelle, il y a en particulier convergence normale de la série entière sur tout segment de type [a,b] ou [-a,+a] inclus dans]-R,+R[.

Démonstration :

Dans le cas complexe ou réel, la fonction : $z \mapsto |z|$, (ou : $x \mapsto |x|$) est continue sur le compact C donc elle y est bornée et atteint ses bornes, puisque à valeurs réelles.
Donc : $\exists z_0 \in C$, $|z_0| = \max\{|z|, z \in C\}$.
Et comme : $C \subset B(0,1)$, on a : $|z_0| < R$.

Dans ce cas : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in C$, $|z| \leq |z_0|$, donc : $|a_n|.|z|^n \leq |a_n|.|z_0|^n$, d'où : $\sup_{z\in C}|a_n|.|z|^n \leq |a_n|.|z_0|^n$.

Mais comme la série $\sum a_n.z_0^n$ est absolument convergente (puisque : $|z_0| < R$), on en déduit la convergence de $\sum \sup_{z\in C}|a_n|.|z|^n$, donc la convergence normale de la série de fonctions sur C.

La démonstration s'adapte immédiatement dans le cas réel, et pour finir, il suffit de remarquer que [a,b] ou [-a,+a] sont des ensembles fermés, bornés donc des compacts de $\mathbb{R}$.

Théorème 2.2 : continuité de la somme d'une série entière de variable réelle

Soit $\sum a_n.x^n$ une série entière de variable réelle, de rayon de convergence R et de somme S.

La fonction S est continue sur l'intervalle ouvert de convergence]-R,+R[.

Démonstration :

La continuité des fonctions : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto a_n.x^n$, sur tout intervalle : $[a,b] \subset]-R,+R[$, et la convergence normale sur [a,b], de la série de ces fonctions, font que la somme de cette série (soit la somme S de la série entière) est continue sur tout intervalle : $[a,b] \subset]-R,+R[$, donc sur]-R,+R[lui-même.

Théorème 2.3 : continuité de la somme d'une série entière de variable complexe

Soit $\sum a_n.z^n$ une série entière de variable complexe, de rayon de convergence R et de somme S.

La fonction S est continue sur le disque ouvert D(0,R).

Démonstration (hors programme) :

Notons S_n la somme partielle de la série entière, pour : $n \in \mathbb{N}$.

Soit : $z_0 \in D(0,R)$, et donc : $|z_0| < R$, et soit : $\varepsilon > 0$.

En posant : $\rho = \frac{1}{2}.(|z_0| + R) > |z_0|$, on constate que : $z_0 \in B'(0,\rho)$, boule fermée de centre 0 et de rayon ρ, puis que cette boule est compacte (fermée et bornée), et incluse dans le disque ouvert de convergence.

La série entière convergeant normalement donc uniformément sur cette boule, on sait que :

$\exists N \in \mathbb{N}, \sup_{z \in B'(0,\rho)} |S(z) - S_N(z)| \le \frac{\varepsilon}{3}$.

Puisque la fonction S_N est continue car polynomiale sur $\mathbb{C}$, on sait que :

$\exists \alpha > 0, \forall z \in \mathbb{C}, (|z - z_0| \le \alpha) \Rightarrow (|S_N(z) - S_N(z_0)| \le \frac{\varepsilon}{3})$.

Enfin, en posant : $\eta = \min(\alpha, \rho - |z_0|) > 0$, on constate que :

$\forall z \in \mathbb{C}, (|z - z_0| \le \eta) \Rightarrow (|S_N(z) - S_N(z_0)| \le \frac{\varepsilon}{3})$, et : $(|z| \le \eta + |z_0| \le \rho < R) \Rightarrow (|S(z) - S_N(z)| \le \frac{\varepsilon}{3})$.

Mais cette dernière inégalité est aussi valable pour z_0, et donc :

$\forall z \in \mathbb{C}, (|z - z_0| \le \eta) \Rightarrow (|S(z) - S(z_0)| \le |S(z) - S_N(z)| + |S_N(z) - S_N(z_0)| + |S_N(z_0) - S(z_0)| \le \varepsilon)$.

La fonction S est bien continue en z_0, pour tout : $z_0 \in D(0,R)$, donc sur $D(0,R)$.

Théorème 2.4 : primitives de la somme d'une série entière de variable réelle

Soit $\sum a_n.x^n$ une série entière de variable réelle, de rayon R, et de somme : $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n$.

On peut intégrer terme à terme S sur tout segment inclus dans]-R,+R[.

En particulier, S admet sur]-R,+R[des primitives qui valent : $C + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.\frac{x^{n+1}}{n+1}$, où : $C \in \mathbb{C}$.

Ces primitives ont même rayon de convergence R que $\sum a_n.x^n$.

Démonstration :

S étant continue sur]-R,+R[, elle y admet des primitives.

De plus, pour : $0 \le a < R$, la série entière $\sum a_n.x^n$ converge normalement sur [-a,+a] donc on peut la primitiver terme à terme.

Finalement les primitives de S sur [-a,+a], (qui sont toutes égales à une constante additive près) valent :

$\int S(x).dx = C + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int a_n.x^n.dx\right) = C + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.\frac{x^{n+1}}{n+1}$, où C est une constante réelle ou complexe.

Ces nouvelles séries entières on un rayon de convergence R_p.

• Pour x non nul, la convergence de $\sum a_n.\frac{x^{n+1}}{n+1}$ est équivalente à celle de $\sum a_n.\frac{x^n}{n+1}$, puisqu'elles sont égales entre elles à une constante multiplicative près.

Mais alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \left|\frac{a_n}{n+1}\right| \le |a_n|$, et on en déduit que : $R_p \ge R$.

• Puis : $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < R_p, \exists \rho \in \mathbb{R}^+, |z| < \rho < R_p$.

On peut alors écrire : $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n.z^n| = |a_n|.\frac{\rho^n}{n+1}.[(n+1).\frac{|z|^n}{\rho^n}]$.

Et comme la suite $\left((n+1).\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n\right)$ tend vers 0, du fait du théorème des croissances comparées, on en déduit que : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \ge n_0, (n+1).\frac{|z|^n}{\rho^n} \le 1$, et : $|a_n.z^n| \le |a_n|.\frac{\rho^n}{n+1}$.

Or la série $\sum |a_n|.\frac{\rho^n}{n+1}$ converge (puisque : $0 \le \rho < R_p$), et donc la série $\sum a_n.x^n$ converge absolument.

On en déduit que : $|z| \leq R$, donc : $[0,R_p[\subset [0,R]$, et : $R_p \leq R$.
Finalement : $R_p = R$, et les séries primitives ont même rayon de convergence que la série de départ.

Théorème 2.5 : dérivabilité et caractère C^∞ de la somme d'une série entière

Soit $\sum a_n.x^n$ une série entière de variable réelle, de rayon R, et de somme : $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n$.

Sur]-R,+R[, la fonction S est de classe C^∞, et on obtient ses dérivées successives par dérivation terme à terme de la fonction S.

Toutes les séries entières dérivées de S ont même rayon de convergence R que $\sum a_n.x^n$.

De plus :

- $\forall$ x $\in$]-R,+R[, $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n.a_n.x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1).a_{n+1}.x^n$, et :
- $\forall$ p $\in$ ℕ, $\forall$ x $\in$]-R,+R[, $S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!}.a_n.x^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!}.a_{n+p}.x^n$.

Les coefficients de la série entière $\sum a_n.x^n$ vérifie alors : $\forall$ p $\in$ ℕ, $a_p = \frac{S^{(p)}(0)}{p!}$.

Démonstration :

Tout d'abord la série entière $\sum_{n\geq 0} (n+1).a_{n+1}.x^n$ qui s'écrit aussi $\sum_{n\geq 1} n.a_n.x^{n-1}$ a un rayon de convergence R' égal à celui de ses séries primitives qui sont :

$$C + \sum_{n\geq 0} (n+1).a_{n+1}.\frac{x^{n+1}}{n+1} = C + \sum_{n\geq 0} a_{n+1}.x^{n+1} = C + \sum_{n\geq 1} a_n.x^n.$$

Or la série $\sum a_n.x^n$ est une de ces séries (celle pour : $C = a_0$), et donc : R' = R.

De plus, puisque sur]-R,+R[, $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n$, est une primitive de : $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n.a_n.x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1).a_{n+1}.x^n$, on en déduit que la deuxième fonction est en fait la dérivée de la première, autrement dit que :

$$\forall x \in]-R,+R[,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n.a_n.x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1).a_{n+1}.x^n.$$

Puis par récurrence, il est immédiat que S est de classe C^p pour tout : p $\in$ ℕ, qu'on obtient sa dérivée $p^{\text{ième}}$ en dérivant S terme à terme p fois et que le rayon de convergence des séries dérivées est R.
Enfin : $\forall$ p $\in$ ℕ, $S^{(p)}(0)$ vaut le terme constant de la série, soit : $a_p.p!$, et on en déduit le dernier résultat.

Théorème 2.6 : égalité de deux séries entières de rayon de convergence non nul

Soient deux séries entières $\sum a_n.x^n$, et $\sum b_n.x^n$, avec : $0 < R_a \leq R_b$.

Si : $\exists\ 0 < R \leq R_a$, $\forall$ x $\in$]-R,+R[, $S_a(x) = S_b(x)$, alors : $\forall$ n $\in$ ℕ, $a_n = b_n$.

Démonstration :

La série entière définie par $(S_a - S_b)$ a un rayon de convergence au moins égal à R_a, et sur]-R,+R[, elle est nulle, donc toutes ses dérivées sont également nulles, notamment en 0.
Donc : $\forall$ n $\in$ ℕ, $(S_a - S_b)^{(n)}(0) = 0 = n!.(a_n - b_n)$, d'où : $a_n = b_n$.

Théorème 2.7 : cas de fonctions paires ou impaires

Si une fonction paire se développe en série entière, tous les termes d'indices impairs de son développement s'annulent.
De même, si une fonction impaire se développe en série entière, tous les termes d'indices pairs de son développement s'annulent.

Démonstration :

Si f est une fonction paire se développant en série entière sur]-r,+r[, alors :

$$\forall x \in]-r,+r[,\ f(x) = S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n = f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n.a_n.x^n.$$

En appliquant le théorème précédent, on en déduit que : $\forall$ n $\in$ ℕ, $a_n = (-1)^n.a_n$, et donc tous les coefficients a_n sont nuls si pour les n impairs (même raisonnement pour les fonctions impaires).

3. Fonctions développables en série entière, développement de fonctions en série entière.

Définition 3.1 : fonction développable en série entière

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et soit f une fonction de I dans **K**.

On dit que f est développable en série entière en 0 (ou autour de 0), en abrégé DSE(0) si et seulement si il existe une série entière $\sum a_n.x^n$ de rayon de convergence non nul R, et : $0 < r \leq R$, tels que :

$$\forall x \in]-r,+r[\cap I, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n .$$

Si f est une fonction de]-r,+r[dans **K**, on dit que f est développable en série entière sur]-r,+r[si et seulement si il existe une série entière $\sum a_n.x^n$ de rayon de convergence non nul : $R \geq r$, telle que :

$$\forall x \in]-r,+r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n .$$

On dit alors que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est le développement en série entière en 0 de f.

Théorème 3.1 : condition nécessaire de développement en série entière

Soit : $r > 0$, et f une fonction de]-r,+r[, dans **K**, développable en série entière en 0, telle que :

$$\forall x \in]-r,+r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n .$$

Alors f est de classe C^∞ sur]-r,+r[, et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{n!}.f^{(n)}(0)$.

Démonstration :

Si f coïncide avec la somme S d'une série entière sur]-r,+r[, elle est alors C^∞ puisqu'une somme de série entière est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence.

De plus : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S^{(n)}(0) = n!.a_n$, et : $S = f$, d'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{n!}.S^{(n)}(0) = \frac{1}{n!}.f^{(n)}(0)$.

Définition 3.2 : série de Taylor d'une fonction de classe C^∞ autour de 0

Soit : $r > 0$, et f une fonction de]-r,+r[, dans **K**, de classe C^∞ sur]-r,+r[.

On appelle série de Taylor de f en 0 la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.x^n$.

Théorème 3.2 : développements en série entière obtenus directement ou par la formule de Taylor

Les fonctions suivantes sont développables en série entière (on note R leur rayon de convergence) :

- $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, R = 1, pas de convergence pour : |z| = 1.
- $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, R = +∞, et en particulier :
- $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, R = +∞.
- $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n.\frac{x^{2n}}{(2.n)!}$, R = +∞.
- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{(2.n+1)!}$, R = +∞.

Démonstration :

- Pour : $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum z^n$ est géométrique et converge si et seulement si : |z| < 1.

En effet, la somme partielle S_n de cette série vaut : $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$, pour : $z \neq 1$, et (n+1) pour : z = 1.

Donc la suite des sommes partielles converge pour : |z| < 1, et la somme de la série vaut : $\frac{1}{1-z}$.

- C'est la définition de la fonction exp, exponentielle complexe.
- Pour la fonction exponentielle réelle, elle est de classe C^∞ sur ℝ, et :
  $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exp^{(n)} = \exp$, d'où : $\exp^{(n)}(0) = 1$.

Puis la formule de Taylor avec reste intégral donne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}.\exp^{(n+1)}(t).dt .$$

Il suffit alors d'écrire : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}.\exp^{(n+1)}(t).dt\right| \leq e^{|x|}.\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}.dt\right| = e^{|x|}.\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$,

en distinguant au besoin les cas : x > 0, et : x < 0, et en majorant e^t sur [0,x] ou [x,0] par $e^{|x|}$.

Si maintenant, on fait tendre n vers $+\infty$, l'intégrale (à x fixé) tend vers 0 et la somme partielle $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.x^k$ tend donc vers e^x, d'où l'égalité.

- Pour sinus et cosinus, on remarque tout d'abord que les fonctions sont de classe C^∞ sur ℝ, et que :
  $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}$, $\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n.\frac{\pi}{2})$, et : $\cos^{(n)}(x) = \cos(x + n.\frac{\pi}{2})$.

On utilise alors la formule de Taylor avec reste intégral, et on remarque que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}.\sin^{(n+1)}(t).dt\right| \leq 1.\left|\int_0^x \left|\frac{(x-t)^n}{n!}\right|.dt\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$, de même pour cosinus.

Autrement dit, le reste intégral tend vers 0 (pour x fixé) quand n tend vers $+\infty$, et la somme partielle tend vers sin(x) (ou cos(x)), lorsque n tend vers $+\infty$.

Et comme, pour n pair, avec : n = 2.p, $\sin^{(n)}(0) = 0$, $\cos^{(n)}(0) = (-1)^p$, et pour n impair, avec : n = 2.p + 1, on a de même : $\sin^{(n)}(0) = (-1)^p$, et : $\cos^{(n)}(0) = 0$, on en déduit les deux développements proposés après réindexation des deux séries.

Théorème 3.3 : développements en série entière obtenus par combinaisons linéaires

Les fonctions suivantes sont développables en série entière (on note R leur rayon de convergence) :

- $ch(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2.n)!}$, R = $+\infty$.
- $sh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2.n+1)!}$, R = $+\infty$.

Démonstration :

On obtient le développement de ch et de sh sur ℝ grâce aux égalités :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right).\frac{x^n}{n!},\ sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{2}\right).\frac{x^n}{n!},$$

et on distingue alors deux cas :

- si n est pair, avec : n = 2.p, alors : $\frac{1+(-1)^n}{2} = 1$, et : $\frac{1-(-1)^n}{2} = 0$
- si n est impair, avec : n = 2.p + 1, alors : $\frac{1+(-1)^n}{2} = 0$, et : $\frac{1-(-1)^n}{2} = 1$.

Il suffit alors de réindexer les termes de la somme (avec p) pour obtenir les expressions proposées.

Théorème 3.4 : développements en série entière obtenus par dérivation ou intégration

Les fonctions suivantes sont développables en série entière (on note R leur rayon de convergence) :

- $\dfrac{p!}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(n+p)!}{n!}.x^n$, R = 1, pas de convergence en ±1.
- $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n.\dfrac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}.\dfrac{x^n}{n}$, R = 1, convergence et égalité en +1.
- $\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$, R = 1, convergence et égalité en -1.
- $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n.x^{2n}$, R = 1, pas de convergence en ±1.
- $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n.\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, R = 1, convergence et égalité en ±1.

Démonstration :

- La série géométrique, pour x réel donne : ∀ x ∈]-1,+1[, $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, et il suffit de calculer les dérivées p^{ièmes} de ces fonctions (par exemple par récurrence) pour obtenir les égalités proposées.

Le rayon de convergence vaut 1 et il y a divergence grossière pour : x = ±1.
- ln(1 + x) s'obtient en intégrant terme à terme $\dfrac{1}{1+x}$, sur]-1,+1[.

Pour : x = 1, on peut remarquer que la série de fonctions converge uniformément sur [0,1].

En effet, pour tout : x ∈ [0,1], la série numérique $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1}.\dfrac{x^n}{n}$ est alternée, vérifie le critère spécial donc converge, et : ∀ x ∈ [0,1], ∀ n ∈ ℕ*, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1}.\dfrac{x^k}{k}\right| \leq \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \leq \dfrac{1}{n+1}$.

D'où : ∀ n ∈ ℕ*, $\sup_{x\notin[0,1]} |R_n(x)| \leq \dfrac{1}{n+1}$, et la convergence uniforme de la série de fonctions sur [0,1].

La somme S est alors continue sur [0,1], en particulier elle est définie et continue en 1.

Finalement : $S(1) = \lim_{x\to 1} S(x) = \lim_{x\to 1} \ln(1+x) = \ln(2)$.
- ln(1 – x) s'obtient en remplaçant x par –x dans l'égalité précédente.
- Pour $\dfrac{1}{1+x^2}$, on pose : u = x^2, et :

∀ x ∈]-1,+1[, u = x^2 ∈]-1,+1[, et : $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1+u} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n.u^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n.x^{2n}$.

Pour : x = ±1, il y a divergence grossière de la série.
- Pour arctan, on intègre la série précédente et pour la valeur en 1 (en -1,on utilise l'imparité de la fonction), on travaille comme pour ln(1 + x), grâce à une convergence uniforme et une limite.

Théorème 3.5 : développements en série entière obtenus à l'aide d'une équation différentielle

Les fonctions suivantes sont développables en série entière (on note R leur rayon de convergence) :

- $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\alpha.(\alpha-1).(\alpha-n+1)}{n!}.x^n$, R = 1, (α ∉ ℕ).

  R = +∞, (α ∈ ℕ).
- $\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2.n)!}{2^{2n}.(n!)^2}.\dfrac{x^{2n+1}}{2.n+1}$, R = 1 convergence et égalité en ±1.

Démonstration :

- Pour la fonction : x ↦ $(1 + x)^\alpha$, on va utiliser une équation différentielle.

Cette fonction f_α, définie sur]-1,+∞) est un polynôme si : α ∈ ℕ.

Elle est évidemment dans ce cas développable en série entière sur ℝ puisqu'un polynôme est une série entière particulière.

Si : α ∉ ℕ, f_α est continue et dérivable sur]-1,+1[et vérifie :

$\forall$ x $\in$]-1,+∞), (E) $(1 + x).f_\alpha'(x) - \alpha.f_\alpha(x) = 0$.
D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, cette équation admet des solutions sur tout intervalle I inclus dans]-1,+∞), de la forme : $y(x) = \lambda.(1 + x)^\alpha$, et en particulier une seule qui vaut 1 en 0, correspondant à la valeur : $\lambda = 1$.

Par ailleurs, soit : $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, une série entière de rayon de convergence R supposé non nul.

Alors y (qui est de classe C^∞ sur]-R,+R[) est solution sur]-R,+R[de l'équation (E) si et seulement si :

$\forall$ x $\in$]-R,+R[, $(1+x).\sum_{n=1}^{+\infty} n.a_n.x^{n-1} - \alpha.\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$.

On développe alors les produits, on regroupe les termes de puissances identiques, en réindexant au besoin les séries et on aboutit à :

$\forall$ x $\in$]-R,+R[, $\sum_{n=0}^{+\infty} [(n+1).a_{n+1} + (n-\alpha).a_n]x^n = 0$.

Or une série entière est nulle sur]-R,+R[si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, d'où :

$\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1}.a_n$.

En résumé, une série entière (de rayon de convergence a priori non nul) est solution de (E) sur un intervalle si et seulement si ses coefficients vérifient les égalités au-dessus.

Réciproquement, soit : la série entière S définie par : $a_0 = 1$, $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1}.a_n$.

Puisque : $\alpha \notin \mathbb{N}$, tous ses coefficients sont non nuls, elle a un rayon de convergence égal à 1 d'après la règle de d'Alembert, vérifie l'équation différentielle (E), et : S(0) = 1.

Donc S coïncide avec f_α sur]-1,+1[, et : $\forall$ x $\in$]-1,+1[, $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha.(\alpha-1).(\alpha-n+1)}{n!}.x^n$.

• Si maintenant, on écrit cette égalité pour : $\alpha = -\frac{1}{2}$, on obtient :

$\forall$ u $\in$]-1,+1[, $\frac{1}{\sqrt{1+u}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)...\left(-\frac{2.n-1}{2}\right).\frac{u^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2.n)!}{2^{2n}.(n!)^2}.(-1)^n.u^n$.

Puis : $\forall$ x $\in$]-1,+1[, u = x^2 $\in$]-1,+1[, et : $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2.n)!}{2^{2n}.(n!)^2}.x^{2n}$.

En intégrant alors terme à terme avec : arcsin(0) = 0, on termine avec :

$\forall$ x $\in$]-1,+1[, $\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2.n)!}{2^{2n}.(n!)^2}.\frac{x^{2n+1}}{2.n+1}$.

Puis, grâce à la formule de Stirling on a : $\frac{(2.n)!}{2^{2n}.(n!)^2}.\frac{1}{2.n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(2.n)^{2n}.e^{-2n}.\sqrt{4.\pi.n}}{2^{2n}.[n^n.e^{-n}.\sqrt{2.\pi.n}]^2.2.n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}}.\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

Donc : $\sup_{x\in[-1,+1]} \left| \frac{(2.n)!}{2^{2n}.(n!)^2}.\frac{x^{2n+1}}{2.n+1} \right| = \frac{(2.n)!}{2^{2n}.(n!)^2}.\frac{1}{2.n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}}.\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

La série entière converge donc normalement sur [-1,+1], sa somme y est continue, tout comme la fonction arcsin, et : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2.n)!}{2^{2n}.(n!)^2}.\frac{1}{2.n+1} = \lim_{x\to1} S(x) = \lim_{x\to1} \arcsin(x) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.

En -1, on a le même résultat ou on utilise l'imparité des fonctions.

Théorème 3.6 : lien entre exponentielle complexe, sinus et cosinus

Pour tout : z $\in$ $\mathbb{C}$, z = a + i.b, avec : (a,b) $\in$ $\mathbb{R}^2$, on a :

$\forall$ t $\in$ $\mathbb{R}$, $e^{t.z} = \exp(t.z) = e^{t.a}.(\cos(t.b) + i.\sin(t.b))$.

On a donc en particulier : $\forall$ t $\in$ $\mathbb{R}$, $e^{t.z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.t^n$.

Démonstration :

Pour : z = a + i.b, (a,b) ∈ ℝ², t ∈ ℝ, t.z = (a.t) + i.(b.t), avec : (a.t, b.t) ∈ ℝ².
Donc : exp(t.z) = exp(a.t).exp(i.b.t), puisque cette relation a été démontrée dans le théorème 1.9.
Mais t étant réel, on a : exp(a.t) = $e^{a.t}$, du fait de l'égalité des expressions des séries entières.

De même : cos(t.b) + i.sin(t.b) = $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n.\frac{(b.t)^{2n}}{(2.n)!}+i.\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n.\frac{(b.t)^{2n+1}}{(2.n+1)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(i.b.t)^{2n}}{(2.n)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(i.b.t)^{2n+1}}{(2.n+1)!}$,

et en regroupant les deux sommes (quitte au besoin à repasser par les sommes partielles), on a donc :

cos(b.t) + i.sin(b.t) = $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(i.b.t)^n}{n!}=\exp(i.b.t)$.

Autrement dit, on a bien : exp(t.z) = $e^{a.t}$.(cos(b.t) + i.sin(b.t)).

En réécrivant la série de l'exponentielle, on constate bien par ailleurs que : ∀ t ∈ ℝ, $e^{t.z}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}.t^n$.

Remarque :

La définition de l'exponentielle complexe par la formule : ∀ z ∈ ℂ, $\exp(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$, permet de définir proprement les fonctions sinus et cosinus sur ℝ, et de montrer ainsi leurs principales propriétés par :
∀ t ∈ ℝ, exp(i.t) = cos(t) + i.sin(t), autrement dit par :
∀ t ∈ ℝ, cos(t) = Re(exp(i.t)), et : sin(t) = Im(exp(i.t)).
Les fonctions sinus et cosinus ont ainsi comme définition le fait d'être sommes de séries entières.

Exemple 3.7 : sommation de séries entières

La plupart des séries entières dont on demande la sommation explicite se calculent à partir des séries géométriques et exponentielles et des séries qui en sont déduites.
Par exemple :

- ∀ x ∈ ℝ, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n-1)}{n!}.x^n=(x-1).e^x$,
- ∀ x ∈]-1,+1[, $\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+1).x^n=\frac{2.x^2-x+1}{(1-x)^3}$.

Démonstration :

L'idée dans les deux cas est de se rapprocher de séries entières connues.

- On commence par écrire : ∀ n ≥ 1, $\frac{n-1}{n!}=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}$, et donc :

∀ x ∈ ℝ, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n-1)}{n!}.x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n-1)}{n!}.x^n-1=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}.x^n-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}.x^n-1=x.\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=(x-1).e^x$.

- Même chose, mais avec d'autres séries en perspective :

∀ n ∈ ℕ, n² + 1 = n.(n – 1) + n + 1, d'où : ∀ x ∈]-1,+1[,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+1).x^n=\sum_{n=2}^{+\infty}n.(n-1).x^n+\sum_{n=1}^{+\infty}n.x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=x^2.(\frac{1}{1-x})''+x.(\frac{1}{1-x})'+(\frac{1}{1-x})=\frac{2.x^2-x+1}{(1-x)^3}.$$

Dans les deux cas, il faut surveiller les indices de départ dans les sommes qui apparaissent et justifier que toutes les séries intermédiaires sont convergentes.
Enfin, si le coefficient de la série à sommer est du type fraction rationnelle en n, on essaiera de se rapprocher d'une série géométrique (ou de séries qui en découlent), et s'il est du type inverse d'une factorielle (et ses variantes) on essaiera de se rapprocher d'une série de la famille des exponentielles (exp, sin, cos, ch, sh, etc…).