Séries Numériques.

Exercices 2012-2013.

Exercices de base.

Séries générales.

1. Pour : $x \in]-1,+1[$, et : $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \dfrac{x^n}{(1-x^n).(1-x^{n+1})}$.

   a. Montrer que $(1 - x).u_n$ peut se mettre sous la forme du terme général d'une série télescopique.
   b. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge et préciser sa somme.

2. Soit (a_n) une suite positive, et (u_n) la suite définie par :
   - $u_0 > 0$,
   - $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{a_n}{u_n}$.

   a. Montrer que la suite (u_n) est bien définie.
   b. Montrer que (u_n) est croissante.
   c. Montrer que si (u_n) converge, sa limite est strictement positive puis que la série $\sum a_n$ converge.
   d. Réciproquement, montrer que si $\sum a_n$ converge, la suite (u_n) est convergente.

3. A l'aide d'une série télescopique, montrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum \ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Séries à termes positifs.

4. Préciser la nature des séries suivantes en indiquant à partir de quel terme sont définies ces séries.
   - $\sum \dfrac{n}{n^2+1}$,
   - $\sum \left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}\right)$,
   - $\sum \dfrac{ch(n)}{ch(2.n)}$,
   - $\sum \ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$,
   - $\sum \left[e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]$,
   - $\sum \dfrac{1}{n.\cos^2(n)}$.

5. Etudier la convergence des séries suivantes :
   - $\sum n^2.e^{-\sqrt{n}}$,
   - $\sum \dfrac{n!}{\ln(n).e^{2.n}}$,
   - $\sum \dfrac{1}{n.\sqrt[n]{n}}$.

6. On pose : $u_n = \dfrac{n!.e^n}{n^n}.n^\alpha$, où : $\alpha \in \mathbb{R}$, et : $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

   a. A l'aide d'un développement limité, étudier la nature de la série $\sum v_n$ selon la valeur de α.
   b. En déduire, pour une valeur de α bien choisie, le début de la formule de Stirling.

7. Pour : $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \dfrac{(2.n)!}{2^{2.n}.n!^2}$.

   a. En étudiant la série de terme général $[\ln(u_n) - \ln(u_{n+1})]$, montrer que (u_n) tend vers 0.
   b. En étudiant la série de terme général $[\ln((n+1).u_{n+1}) - \ln(n.u_n)]$, montrer que $(n.u_n)$ tend vers $+\infty$.

   On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n}{n+1}$, et : $\forall N \in \mathbb{N}$, $V_N = \sum\limits_{n=0}^{N} v_n$.

   c. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(2.n + 4).v_{n+1} = (2.n + 1).v_n$.
   d. En déduire, en sommant les égalités précédentes, une expression de V_N à l'aide de N et de u_{N+1}.

e. En déduire que (V_N) converge puis donner la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n+1}$.

8. Soient $\sum u_n$ et $\sum \alpha_n$ des séries à termes strictement positifs, telles que :

   $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$.

   a. Montrer que : $u_n = O(\alpha_n)$, en $+\infty$.

   b. Que peut-on en déduire entre la convergence de $\sum u_n$ et celle de $\sum \alpha_n$?

9. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$, deux séries à termes réels strictement positifs.
   Si les deux séries sont convergentes, montrer que les séries dont les termes généraux sont donnés ci-dessous sont encore convergentes :

   - $\max(u_n,v_n)$,
   - $\sqrt{u_n.v_n}$,
   - $\frac{u_n.v_n}{u_n+v_n}$.

10. Soit $\sum u_n$ une série de réels positifs, et : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$.

    a. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge aussi.

    b. Montrer qu'on peut exprimer v_n à l'aide de u_n pour tout n, et en déduire que la réciproque de l'implication précédente.

Séries de signe quelconque, sommes de séries.

11. Quelle est la nature d'une série dont le terme général est la somme des termes généraux d'une série absolument convergente et d'une série semi-convergente ?

12. Nature et somme éventuelle des séries (on précisera à quel terme commencent les séries) :

    - $\sum \ln\left(\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)$ (on pourra se souvenir de ses formules de trigonométrie pour la somme).
    - $\sum \frac{2.n-1}{n.(n^2-1)}$ (on utilisera une décomposition en éléments simples).
    - $\sum \frac{n^2}{n!}$,
    - $\sum \frac{n^3-n}{n!}$,
    - $\sum 2^{\frac{n}{2}}.\sin\left(\frac{n.\pi}{4}\right).x^n$, $x \in \mathbb{R}$,
    - $\sum x^{2n+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

13. Pour : $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \sin(\pi.(2+\sqrt{3})^n)$.

    a. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n]$ est un entier pair.

    b. En déduire que la série $\sum u_n$ converge.

14. Trouver : $P \in \mathbb{R}[X]$, tel que : $u_n = \sqrt[3]{n^3-4.n^2+1} - \sqrt{P(n)}$ soit le terme général d'une série convergente.

Séries alternées, et autour des séries alternées.

15. Etudier la convergence de :

    - $\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$,
    - $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.\cos\left(\frac{1}{n}\right)$,
    - $\sum (-1)^n.\sqrt[n]{n}.\sin\left(\frac{1}{n}\right)$,
    - $\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n.\sqrt{n+1}}$.

16. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n.8^n}{(2.n)!}$ converge et que sa somme est un réel négatif.

Vrai-faux.

17. Quelles affirmations parmi les suivantes sont vraies ?
   - ($\sum u_n$ converge) $\Rightarrow$ (u_n^2 converge).
   - ($\sum u_n$ diverge) $\Rightarrow$ ($\sum u_n^2$ diverge).
   - ($\sum u_n$ converge, $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $u_n \geq 0$) $\Rightarrow$ ($\sum u_n^2$ converge).
   - ($\sum u_n$ convergente, et : $\forall$ n $\geq$ 0, $u_n \neq -1$) $\Rightarrow$ ($\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ convergente).

Autour de la série harmonique.

18. Déterminer a et b pour que $\sum (\ln(n) + a.\ln(n+1) + b.\ln(n+2))$ converge et sommer alors la série.

19. Rappeler la valeur de $[1^2 + 2^2 + \ldots + n^2]$, pour : n $\in$ $\mathbb{N}$*.
   A l'aide d'une décomposition en éléments simples, en déduire la somme de la série de terme général $\frac{1}{1^2+2^2+\ldots+n^2}$, après en avoir démontrer la convergence.

<u>Exercices plus.</u>

Séries à termes positifs.

20. Etudier la convergence des séries suivantes :
   - $\sum \left[\mathrm{Arc}\tan\left(1+\frac{1}{n^a}\right) - \frac{\pi}{4}\right]$, a > 0,
   - $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$,
   - $\sum \left[\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$,
   - $\sum \left[(n^a+1)^{\frac{1}{a}} - (n^b+1)^{\frac{1}{b}}\right]$, (a,b) $\in$ $\mathbb{R}^{+*2}$,
   - $\sum \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$.

21. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geq1} \frac{E(\sqrt{n+1}) - E(\sqrt{n})}{n}$, et calculer sa somme.

22. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geq1} \frac{n - p.E\left(\frac{n}{p}\right)}{n.(n+1)}$, où : p $\in$ $\mathbb{N}$*, et calculer sa somme.

23. Règle de Cauchy.
   Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs, telle que : $\exists$ L $\in$ [0,+∞), $\left(u_n^{\frac{1}{n}}\right)$ tend vers L en +∞.
   a. Montrer que si : L < 1, alors la série converge.
   b. Montrer que si : L > 1, alors la série diverge.
   c. Etudier les exemples : $u_n = \left(\frac{n+1}{2.n+5}\right)^n$, $v_n = \frac{n^{\ln(n)}}{(\ln(n))^n}$.

Séries alternées, et autour des séries alternées.

24. Etudier la convergence de :
   - $\sum \frac{(-1)^n}{n - \ln(n)}$,
   - $\sum \sin(2.\pi.\sqrt{n^2 + (-1)^n})$.

25. Montrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum \ln\left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Séries de signe quelconque, somme de séries convergentes.

26. Montrer que la série de terme général : $\left(\dfrac{1+\sqrt{n+1}-2.\sqrt{n}}{2^{n+1}}\right)$ converge et préciser sa somme.

27. Nature de la série de terme général : $e^{a.n^2}.\left(1-\dfrac{a}{n}\right)^{n^b}$, où a et b sont des réels.

28. Soit $\sum z^n$ une suite complexe convergente, et : $\forall$ N $\in$ ℕ*, $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} z_n$.

a. Montrer que : $\forall$ N $\in$ ℕ*, $\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{z_n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{S_n}{n.(n+1)} + \dfrac{S_N}{N+1}$.

b. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{z^n}{n}$ converge.

Vrai-faux.

29. Quelles affirmations parmi les suivantes sont vraies ?

a) ($\sum a_n$ convergente, et : $\forall$ n $\in$ ℕ, $a_n \geq 0$) $\Rightarrow$ ($\sum \dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$ convergente).

b) ($\sum u_n$ convergente) $\Rightarrow$ ($\sum (-1)^n.u_n^{\,3}$ convergente).

Sommation par paquets.

30. On définit, à partir de la série harmonique, une nouvelle série de terme général a_n de la façon suivante : on prend p termes positifs, puis q termes négatifs, puis à nouveau p termes positifs, et ainsi de suite. Ainsi, pour : p = 3, q = 2, on aura : $a_1 = \dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}$, $a_2 = -\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}$, $a_3 = \dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{11}$, etc…

Montrer que la série $\sum a_n$ converge et calculer sa somme.

31. Pour : n $\in$ ℕ, on pose : $u_n = \dfrac{j^n}{\sqrt{n}}$, où j est la racine cubique de l'unité habituelle.

a. Montrer que la série de terme général $[u_{3.n} + u_{3.n+1} + u_{3.n+2}]$ est convergente.

b. En déduire que la série $\sum u_n$ converge.

Transformation d'Abel.

32. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles ou complexes.

On note, pour : p $\in$ ℕ*, $\sigma_p = \sum\limits_{k=1}^{p} v_k$.

a. Montrer que : $\forall$ p $\geq$ 1, $\sum\limits_{k=1}^{p} u_k.v_k = u_p.\sigma_p + \sum\limits_{k=1}^{p-1}(u_k - u_{k+1}).\sigma_k$.

b. On suppose de plus que ces suites sont telles que :

- (u_n) est réelle, décroissante de limite 0,
- la suite (σ_p) est une suite bornée.

Montrer que la série de terme général $[u_n.v_n]$ converge.

c. Etudier la convergence des séries :

- $\sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{\cos(n)}{n}$
- $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{e^{i.n.\theta}}{n^{\alpha}}$, avec : $(\alpha,\theta) \in$ ℝ^2.