

1. On doit vérifier que la longueur l_{tot} vérifie dans l'ARQS $l_{tot} \ll \lambda$, soit $n.l.2.\pi.a \ll \frac{2.\pi.c}{\omega}$

Ce qui donne $\omega \ll \frac{c}{n.l.a}$

2. Voir la résolution par le théorème d'Ampère. On obtient $\vec{B} = \mu_0.n.i(t).\vec{e}_z$.

3. On exploite une relation de couplage : $\vec{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. On peut rechercher la forme intégrale :

$$\iint_S \vec{rot} \vec{E} \cdot \vec{dS} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS}, \text{ soit d'après le théorème de Stokes :}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{dl} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS}$$

Or le plan $((M, \vec{e}_r, \vec{e}_z))$ étant un plan d'anti-symétrie pour la distribution, on aura donc $\vec{E} = E.e_\theta$ et par invariance $\vec{E} = E(r).e_\theta$

On choisit donc un cercle de rayon r , alors

$$\checkmark \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{dl} = 2.\pi.r.E(r)$$

$$\checkmark \vec{B} \cdot \vec{dS} = \iint_S \mu_0.n.i(t).dS = B.\pi.r^2$$

On obtient donc $\vec{E} = \frac{-r}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \vec{e}_\theta$

4. On détermine les deux formes d'énergie :

$$\checkmark \mathcal{E}_e = \iiint_V \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \left(\frac{-r}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \right)^2 \cdot d\tau = \int_0^a \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \left(\frac{-r}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \right)^2 \cdot 2.\pi.r.l.dr$$

$$\mathcal{E}_e = \frac{\epsilon_0.a^4.\pi.l}{16} \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)^2, \text{ soit } \langle \mathcal{E}_e \rangle = \frac{\epsilon_0.a^4.\pi.l}{16} \frac{\omega^2.B_{max}^2}{2}$$

$$\checkmark \mathcal{E}_m = \iiint_V \frac{1}{2.\mu_0} \cdot (B)^2 \cdot d\tau = \frac{1}{2.\mu_0} \cdot (B)^2 \cdot \pi.a^2.l \text{ soit } \langle \mathcal{E}_m \rangle = \frac{1}{4.\mu_0} \cdot B_{max}^2 \cdot \pi.a^2.l$$

$$\checkmark \text{ On a donc , comme } \epsilon_0.\mu_0 = \frac{1}{c^2}, \langle \mathcal{E}_e \rangle = \langle \mathcal{E}_m \rangle \cdot \frac{1}{8} \frac{\omega^2.a^2}{c^2}$$

Or l'ARQS implique que $\frac{\omega^2.a^2}{c^2} \ll \frac{1}{n^2.l^2}$ avec $n.l = N$ le nombre total de spires. Comme $N \gg 1$ pour un solénoïde, on en déduit bien que $\langle \mathcal{E}_e \rangle \ll \langle \mathcal{E}_m \rangle$

5. $\vec{\Pi} = \frac{-r}{2.\mu_0} \cdot \frac{\partial B}{\partial t} \cdot B \cdot \vec{e}_r$

6. On a montré que $\mathcal{E}_{tot} \simeq \mathcal{E}_m = \frac{1}{2.\mu_0} \cdot (\mu_0.n.i(t))^2 \cdot \pi.a^2.l = \frac{1}{2} \cdot L.i(t)^2$ donc $L = \pi.a^2.\mu_0.n^2.l$

7. Le bilan énergétique s'écrit $\iiint \frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \oint \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} = - \iiint \mathcal{P}_v \cdot \vec{dS}$

Mais dans le cylindre de rayon a et de hauteur l , il n'y a pas de puissance cédée à des porteurs de charges car le milieu est le vide. Par conséquent on doit vérifier que

$$\iiint \frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \oint \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2.\mu_0} \cdot (\mu_0.n.i(t))^2 \cdot \pi.a^2.l \right) + \left(\frac{-a}{2.\mu_0} \cdot \frac{\partial B}{\partial t} \cdot B \right) \cdot 2.\pi.a.l = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2.\mu_0} \cdot B^2 \cdot \pi.a^2.l \right) - \frac{a}{2.\mu_0} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2} \right) \cdot 2.\pi.a.l = 0$$

On vérifie donc bien ce bilan énergétique.