TD6 Géométrie plane .

Exercice 1. **a)** Montrer que : $\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^2$, $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + \|\vec{b}\|^2$.

Simplifier $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 + \|\vec{a}-\vec{b}\|^2$. Interpréter le résultat.

b) Montrer que : $\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^2$, $\det(\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}) = \det(\vec{a},\vec{a}) - 2\det(\vec{a},\vec{b}) - \det(\vec{b},\vec{b})$.

Exercice 2. Pour tout $\vec{x} \neq 0$, on définit l'application $i(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}$.

a) Déterminer $\|i(\vec{x})\|$ pour tout $\vec{x} \neq 0$.

b) Montrer que : Pout tous $\vec{x}, \vec{y}$ non nuls , $\|i(\vec{x}) - i(\vec{y})\| = \frac{\|\vec{x}-\vec{y}\|}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}$.

c) Montrer que Pour tous $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbf{R}^2$, $\|\vec{a}-\vec{c}\|\|\vec{b}-\vec{d}\| \leq \|\vec{a}-\vec{b}\|\|\vec{c}-\vec{d}\| + \|\vec{b}-\vec{c}\|\|\vec{a}-\vec{d}\|$

Indication. Traiter le cas $\vec{a} = 0$ dans un premier temps.

Exercice 3. A partir des équations cartésiennes de droites suivantes, déterminer un point A, un vecteur $\vec{u}$ directeur et un vecteur $\vec{n}$ normal de la droite.

a) $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 2x = 5y - 4\}$

b) $\mathcal{D}' = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, 3y - 7x + 3 = 0\}$

Les deux droites sont-elles parallèles ? sécantes ? Déterminer $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$.

Exercice 4. Le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormé. Former les équations cartésiennes des bissectrices des deux droites $D_1 : 3x + 4y + 3 = 0$ et $D_2 : 12x - 5y + 4 = 0$.

Exercice 5. Dans un plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé, on considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(-3, 1)$, $(1, 5)$ et $(3, -3)$.

a) Écrire une équation de chacune des trois hauteurs du triangle ABC. Justifier que ces trois hauteurs sont concourantes en un point H dont on précisera les coordonnées.

b) Trouver les coordonnées de H_1 symétrique de H par rapport à la droite (AB).

Exercice 6. Donner les équations des tangentes issues du point $(\sqrt{5}, \sqrt{5})$ au cercle d'équation

$$x^2 + y^2 = 1$$

Exercice 7.

Dans le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, soit A et B deux points distincts, puis k un nombre réel strictement positif et différent de 1.

a) Montrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\vec{MA}.\vec{MB} = 0$ est un cercle de diamètre $[AB]$.

b) ***Application*** Montrer que l'ensemble des points $M \neq B$ du plan tels que $\frac{MA}{MB} = k$ est un cercle dont le centre appartient à la droite (AB).

Exercice 8. Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal. Pour $\lambda \in \mathbf{R}^*$, on désigne par D_λ la droite d'équation : $\lambda x - \lambda^2 y - 1 = 0$.

a) Pour un point M_0 de coordonnées (x_0, y_0), discuter le nombre de droites D_λ passant par M_0.

b) Donner une équation de la droite Δ_λ orthogonal à D_λ et passant par le point $P_\lambda(\frac{1}{\lambda}, 0)$.

c) Montrer que les droites Δ_λ ont un point commun est un seul A que l'on déterminera. Etablir enfin que toute droite contenant A et non parallèle à l'axe $(O, \vec{j})$ est une droite de la famille Δ_λ.

Exercice 9. Soit D_1 la droite de repère $(A_1, \vec{u}_1)$ avec $A_1(a, 2, 3)$ et $\vec{u}_1(1, 1, 1)$; D_2 la droite de repère $(A_2, \vec{u}_2)$ avec $A_2(b, 1, 4)$ et $\vec{u}_2(2, -1, 3)$.

a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que D_1 et D_2 soient concourantes.

b) Dans ce cas déterminer une équation du plan qu'elles déterminent.

Exercice 10.

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ et soit S la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et D la droite passant par $A(1, 1, \alpha)$ et dirigée par $\vec{u}(1, 2, 2)$. Déterminer α pour que $D \cap S$ ne soit pas vide.

Problème sur le triangle. Soit ABC un triangle non aplati du plan affine et l'on note a, b, c les longueurs des côtés BC,CA, AB ainsi que $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ les mesures dans $]0; \pi[$ de ses angles géométriques. Soit A', B', C' les milieux respectifs de $[BC]$,$[CA]$, $[AB]$

a) Montrer que les trois médiatrices d'un triangle se coupent en un point O centre d'un unique cercle passant par A, B, C.

b) Montrer que pour tout point M du plan :

$$\vec{MA}.\vec{BC} + \vec{MB}.\vec{CA} + \vec{MC}.\vec{AB} = 0$$

c) En déduire que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point H appelé orthocentre du triangle.

d) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

Le triangle ABC est rectangle en $A \Leftrightarrow AH * BC = AB * AC \Leftrightarrow BA^2 = \bar{B}H * \bar{B}C$

e) Montrer que les trois médianes d'un triangle ABC sont concourantes en un point G appelé centre de gravité du triangle et situé au $\frac{2}{3}$ de la base de chacune d'elles.

Montrer que les trois triangle ABG, BCG et CGA ont exactement la même surface.

f) Montrer que le point G est aussi le centre de gravité du triangle $A'B'C'$.

g) Montrer la relation d'Euler : $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$.

Indication. On pose $\vec{h} = \vec{OH} - \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$, montrer que $\vec{h}.\vec{BC} = 0$.

h) Montrer que O, G, H sont alignés. La droite qui les porte est la droite d'Euler.

i) Montrer *la formule d'Al Kashi* : $a^2 = b^2 + c^2 - 2BC \cos(\hat{A})$.

j) Soit $S = Aire(ABC)$ et R le rayon de son cercle circonscrit, montrer que :

$$\frac{a}{\sin(\hat{A})} = \frac{b}{\sin(\hat{B})} = \frac{c}{\sin(\hat{C})} = \frac{abc}{2S}$$

k) Soit p la longueur du demi périmètre du triangle, montrer la formule de Héron :

$$S = p(p - a)(p - b)(p - c)$$

l) La bissectrice intérieure issue de A coupe $[BC]$ en I_1. Montrer que $I_1 = bar\{(B, b); (C, c)\}$.

m) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M de l'espace tels que $\|\vec{MA} + 2\vec{MB} - 4\vec{MC}\| = 1$. Représenter $\mathcal{E}$.

n) Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M de l'espace tels que

$\|\vec{MA} + 2\vec{MB} - 4\vec{MC}\| = \|\vec{MA} + 2\vec{MB}\|$. Représenter $\mathcal{F}$.