TD5 Fonctions usuelles.

I. Exponentielle, logarithme, puissance.

Exercice 1. Simplifier les expressions suivantes :

a) $\forall x \in \mathbf{R}$, $\ln(\ln(e^{e^x}))$

b) $\forall x \in]1;+\infty[$, $x^{\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}}$.

c) $\forall x \in \mathbf{R}, \cos^2(\frac{1}{2}\arctan(x))$.

Exercice 2. Étudier les fonctions suivantes.

Etude : ***Méthode*** a) Détermination de l'ensemble de définition. b) Étude de la continuité et les limites aux bornes de chacun des intervalles composant l'ensemble de définition. c) Étude de la dérivabilité sur un domaine de dérivation à préciser et calcul de la dérivée. d) Établissement d'un tableau des variations et tracer du graphe.

a) $f(x) = x^{2x}$.

b) $f(x) = (x^2 - 1)\ln(\frac{1-x}{1+x})$.

c) $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$.

d) $f(x) = e^{\frac{x-1}{x^2}}$.

e) $f(x) = \ln(|x^2 - 3x + 2|)$.

II. Fonctions circulaires réciproques.

Exercice 3. Calculer :

$$\arctan(\frac{1}{3}) + \arctan(\frac{1}{2})$$

Exercice 4. Résoudre l' équation d'inconnue $x \in \mathbf{R}$:

$$\arccos(x) = \arccos(\frac{1}{4}) + \arcsin(\frac{1}{3})$$

Exercice 5. Simplifier l'expression :

$$\arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{(x-1)^2+1}})$$

Exercice 6. Calculer la dérivée de l'expression :

$$\arctan(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x})$$

Exercice 7. ♡ Représenter la fonction définie par :

$$f(x) = \arccos(\cos(x)) + \arccos(\cos(2x))$$

Exercice 8. On pose $f(x) = \arcsin(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

b) Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et calculer sa dérivée.

c) En déduire une expression simple de f.

d) Retrouver ce résultat par une méthode directe.

Reprendre les questions précédentes avec la fonction $f(x) = \arcsin(\frac{2x}{1+x^2})$.

Exercice 9. Démontrer que pour tout $x \in]0,1]$:

$$2\arctan(\sqrt{\frac{1-x}{x}}) + \arcsin(2x-1) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 10. Étudier (simplifier) la fonction $\arccos(\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}}) - \arcsin(\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}})$.

Exercice 11. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbf{C}^*$:

(1) $e^z = 3+i$ (2) $e^z = -3+i$ (3) $e^z = -3-4i$ (4) $e^z = 1+i$

III. Fonctions hyperboliques et hyperboliques réciproques.

Exercice 12. Exprimer les expressions suivantes en fonction de ch et sh (technique : "angle" moitié).

$\forall x, y \in \mathbf{R}$, $ch(x+y)$. En déduire $\forall x, y \in \mathbf{R}$, $ch(x-y)$.

$\forall x, y \in \mathbf{R}$, $sh(x+y)$. En déduire $\forall x, y \in \mathbf{R}$, $sh(x-y)$.

Exercice 13. Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{Z}$, $(ch(x) + sh(x))^n = ch(nx) + sh(nx)$.

Exercice 14. Calculer $\sum_{k=0}^{n} ch(2k+1)$.

Exercice 15. Résoudre les équations :

$$5ch(x) - 3sh(x) = 4 \quad , \quad 3sh(x) - ch(x) = 1$$

Exercice 16. Calculer et tracer :

$th(Argth), Argth(th), Arsh(Argth), ch(Argth)$

Exercice 17. Donner le domaine de définition de

$$Argch(\ln(x+1)),\ Argsh(\ln(x+1))$$

Exercice 18. Calculer $ch(x)$ en fonction de $ch(\frac{x}{2})$. Simplifier alors

$$Argch(\sqrt{\frac{1+ch(x)}{2}}) - \frac{x}{2}$$

Exercice 19. ♡ Soit $m \in \mathbf{R}$, résoudre les équations $ch(x) = m$ et $sh(x) = m$.

Exercice 20. Étude Étudier les fonctions suivantes :

$f_1(x) = Arctan(sh)(x)$, $f_2(x) = Argsh(\tan(x))$, $f_3(x) = Arctan(th(\frac{x}{2}))$, $f_4(x) = Argsh(\sqrt{x^2-1})$