$\boxed{\text{TD3 Trigonométrie Correction .}}$

Exercice 1 : Calculer la valeur exacte de chacun des nombres réels suivants :

1. $\cos(\frac{-25\pi}{6}) = \cos(\frac{25\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ car cosinus est une fonction paire et 2π périodique (division euclidienne de 25 par 12) ; $\cos(\frac{127\pi}{4}) = \cos(\frac{7\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ car cosinus est une fonction 2π périodique (division euclidienne de 127 par 8) .
2. $\sin(\frac{-111\pi}{3}) = -\sin(\frac{111\pi}{3}) = -\sin(37\pi) = 0$; $\sin(\frac{277\pi}{4}) = \sin(\frac{5\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 2 : On donne $\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

1. Le signe de $\sin(\frac{\pi}{5}) > 0$ car $0 \leq \frac{\pi}{5} \leq \frac{\pi}{2}$ et pour calculer la valeur exacte de $\sin(\frac{\pi}{5})$ on utilise l'identité $\cos^2 + \sin^2 = 1$. On a donc $\sin^2(\frac{\pi}{5}) = \frac{10-5\sqrt{5}}{16}$ donc $|\sin(\frac{\pi}{5})| = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ or $\sin(\frac{\pi}{5}) > 0$ donc
$$\sin(\frac{\pi}{5}) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$
2. $\cos(\frac{4\pi}{5}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{5}) = -\cos(\frac{\pi}{5})$ et $\sin(\frac{4\pi}{5}) = \sin(\pi - \frac{\pi}{5}) = \sin(\frac{\pi}{5})$
3. $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ donc $\cos^2(\theta) = \frac{\cos(2\theta)+1}{2}$ donc
$$|\cos(\frac{\alpha}{2})| = \sqrt{\frac{\cos(\alpha)+1}{2}}$$
4. Comme $\cos(\frac{\pi}{10}) > 0$ on a $|\cos(\frac{\pi}{10})| = \sqrt{\frac{\cos(\frac{\pi}{5})+1}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}}$.

Exercice 3 : Résoudre sur $\mathbf{R}$ les équations suivantes d'inconnue x et représenter l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométriques.

1. $4\sin(x)^3 + 4\sqrt{3}\sin(x)^2 = 9\sin(x) \Leftrightarrow \sin(x)(4\sin^2(x) + 4\sqrt{3}\sin(x) - 9) = 0$
$$\Leftrightarrow \sin(x) = 0 \textbf{ ou } 4\sin^2(x) + 4\sqrt{3}\sin(x) - 9 = 0$$
On étudie les racines du polynôme $4X^2 + 4\sqrt{3}X - 9$ qui sont $r_1 = -3\sqrt{3} < -1$ et $r_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ avec $\Delta = 3\,4^3$.
On a donc :
$$\sin(x) = 0 \textbf{ ou } 4\sin^2(x) + 4\sqrt{3}\sin(x) - 9 = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \textbf{ ou } \sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x \in \pi\mathbf{Z} \cup (\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbf{Z}) \cup (\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbf{Z})$$
2. On sait que $\cos(\theta) = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$ donc $\sin(3x) = \cos(x + \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \sin(3x) = \sin(\frac{\pi}{4} - x)$, on est donc ramené à la résolution $\sin(\theta) = \sin(\alpha)$. Ainsi :
$$\sin(3x) = \sin(\frac{\pi}{4} - x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} - x + 2m\pi & m \in \mathbf{Z} \\ 3x = \pi - (\frac{\pi}{4} - x) + 2p\pi & p \in \mathbf{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + \frac{m\pi}{2} & m \in \mathbf{Z} \\ x = \frac{3\pi}{4} + p\pi & p \in \mathbf{Z} \end{cases}$$
La solution du système est donc $(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}\mathbf{Z}) \cup (\frac{3\pi}{4} + \pi\mathbf{Z})$.

3. L'équation étant $3\cos(5x) = \cos(2x) + \cos(12x)$, on pense à utiliser la relation $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$ avec $p = 2x$ et $q = 12x$. On a :

$$3\cos(5x) = \cos(2x) + \cos(12x) \Leftrightarrow 3\cos(5x) = 2\cos(5x)\cos(7x)$$

$$\Leftrightarrow \cos(5x)(3 - 2\cos(7x)) = 0 \Leftrightarrow \cos(5x) = 0 \textbf{ ou } \cos(7x) = \frac{3}{2} > 1$$

Donc $\cos(5x) = 0 \Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{2} + m\pi$ **avec** $m \in \mathbf{Z}$, les solutions sont donc $S = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}\mathbf{Z}$.

Exercice 4 : On considère la fonction définie par :

$$f : x \longmapsto \frac{\sin(3x)}{\sin(x)}$$

1. f est définie si et ssi $\sin(x) \neq 0$ donc l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbf{R} \setminus (\pi\mathbf{Z})$.
2. $f(-x) = \frac{\sin(-3x)}{\sin(-x)} = \frac{-\sin(3x)}{-\sin(x)} = f(x)$ donc f est une fonction paire.
3. $f(x+\pi) = \frac{\sin(3(x+\pi))}{\sin(x+\pi)} = \frac{\sin(3x+3\pi)}{\sin(x+\pi)} = \frac{-\sin(3x)}{-\sin(x)} = f(x)$ donc f est une fonction π périodique.
4. La fonction étant π périodique, on peut restreindre l'étude à $D_f \cap [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] = [-\frac{\pi}{2}; 0[\cup]0;\frac{\pi}{2}]$ et la fonction étant paire, on peut restreindre l'étude à $]0;\frac{\pi}{2}]$.
5. f est dérivable sur D_f comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et $f'(x) = \frac{3\cos(3x)\sin(x) - \sin(3x)\cos(x)}{\sin^2(x)}$.

Exercice 5 : $\sqrt{3}\tan(x) - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-\frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}]$.

Exercice 6 : Si on pose $t = \tan(\frac{x}{2})$ on sait que $\sin = \frac{2t}{1+t^2}$ et $\cos = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$A)\ \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1 - (\frac{1-t^2}{1+t^2})}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{2t^2}{2t} = \tan(\frac{x}{2})\ ,\ x \in \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$$

$$B) \qquad \tan(\frac{\pi}{4} + x) + \tan(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)} + \frac{1-\tan(x)}{1+\tan(x)} = 2\frac{1+\tan^2(x)}{1-\tan^2(x)}$$

$$=_{\tan = \frac{\sin}{\cos}} 2\frac{1}{\cos^2(x)}\frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x) - \sin^2(x)} = \frac{2}{\cos(2x)}\ x\ x \in \mathbf{R} \setminus (\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbf{Z})$$

Exercice 7 : 1. $x\sin(\alpha) + \cos(2\alpha) = 1 \Leftrightarrow x \in \begin{cases} \frac{1-\cos(2\alpha)}{\sin(\alpha)} & \alpha \in \mathbf{R} \setminus (\pi\mathbf{Z}) \\ \mathbf{R} & \alpha \in \pi\mathbf{Z} \end{cases}$

2. $2x^2 - 2(\cos(\alpha) + \sin(\alpha))x + \sin(2\alpha) = 0$ on calcule le discriminant $\Delta = 4(1 - \sin(2\alpha))$. Or $0 \leq 1 - \sin(2\alpha)$ donc 2 cas à traiter :
   Si $\sin(2\alpha) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$) alors une seule racine $r = \frac{\cos(\alpha)+\sin(\alpha)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(k\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1)^k$.
   Si $\sin(2\alpha) < 1$ alors il y a deux racines distinctes.

Exercice 8 : Pour tout $x \neq 0[\pi]$ et tout $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$P_n : \text{"}\ \cos(x)\cos(2x)\ldots\cos(2^n x) = \frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\sin(x)}$$

Initialisation $\frac{\sin(2x)}{2\sin(x)} = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{2\sin(x)}$ donc P_0 est vraie.
Hérédité : On suppose P_n vraie à un rang n fixé, montrons P_{n+1} vraie.
$\cos(x)\cos(2x)\dots\cos(2^n x)\cos(2^{n+1}x) =_{HR} \frac{\sin(2^{n+1}x)\cos(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\sin(x)}$ or $\cos(a)\sin(a) = \frac{1}{2}\sin(2a)$ donc avec $a = 2^{n+1}x$ on obtient : $\frac{\sin(2^{n+1}x)\cos(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\sin(x)} = \frac{\sin(2^{n+2}x)}{2^{n+2}\sin(x)}$

Exercice 9 : Un peu de logique !

1. "$(\exists x \in \mathbf{R}, \cos(x) = 0)$ **et** $(\exists x \in \mathbf{R}, \sin(x) = 0)$" est vraie car il existe $x = \frac{\pi}{2}$ tel que $\cos(x) = 0$ et il existe $x = 0$ tel que $\sin(x) = 0$.
2. "$(\exists x \in \mathbf{R}, \cos(x) = 0$ **et** $\sin(x) = 0)$" est fausse. On peut effectuer un raisonnement par l'absurde, supposons qu'il existe $x \in \mathbf{R}$ tel que $\cos(x) = 0$ **et** $\sin(x) = 0$ or $\cos^2 + \sin^2 = 1$ donc $0 = 1$ Contradiction !