TD3 Trigonométrie .

Exercice 1 : Calculer la valeur exacte de chacun des nombres réels suivants :

1. $\cos(\frac{-7\pi}{6})$; $\cos(\frac{-8\pi}{6})$; $\cos(\frac{-25\pi}{6})$; $\cos(\frac{127\pi}{4})$.
2. $\sin(\frac{-111\pi}{3})$; $\sin(\frac{277\pi}{4})$; $\sin(\frac{-31\pi}{6})$; $\sin(\frac{-5\pi}{3})$.

Exercice 2 : On donne $\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

1. Déterminer le signe $\sin(\frac{\pi}{5})$ et calculer la valeur exacte de $\sin(\frac{\pi}{5})$.
2. En déduire les valeurs exactes du cosinus et du sinus de : $\frac{4\pi}{5}$.
3. ♡ Exprimer $\cos(2\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ puis en déduire $\cos^2(\frac{\theta}{2})$ en fonction de $\cos(\theta)$.
4. Déterminer $\cos(\frac{\pi}{10})$ et $\cos(\frac{3\pi}{10})$.

Exercice 3 : Déterminer les valeurs de θ dans chacun des cas suivants.

$$(S_1)\begin{cases}\cos(\theta)=\frac{1}{2}\\ \sin(\theta)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases};\quad (S_2)\begin{cases}\cos(\theta)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin(\theta)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases};\quad (S_3)\begin{cases}\cos(\theta)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin(\theta)=\frac{1}{2}\end{cases};$$

Exercice 4 : Résoudre sur $\mathbf{R}$ les équations suivantes d'inconnue x et représenter l'ensemble des solutions sur le cercle trigonométriques.

1. $4\cos(x)^2 = 1$; $4\sin(x)^3 + 4\sqrt{3}\sin(x)^2 = 9\sin(x)$;
2. $\cos(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$; $\sin(3x) = \cos(x)$;
3. $3\cos(5x) = \cos(2x) + \cos(12x)$; $2\sin^2(x) = 3(1 + \cos(x))$.
4. $\frac{1+\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}$; $\frac{\sqrt{2}\sin(x)+\sqrt{2}}{1+2\sin(x)} = 1$ Préciser le domaine de validité.

Exercice 5 : On considère la fonction définie par :

$$f : x \longmapsto \frac{\sin(3x)}{\sin(x)}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer et simplifier $f(-x)$. Que constatez-vous ?
3. Calculer et simplifier $f(x + \pi)$. Que constatez-vous ?

Exercice 6 : A l'aide du cercle trigonométrique, résoudre l'inéquation sur l'intervalle I donné :

1. $\cos^2(x) \leq \frac{1}{2}$ sur $I = [-\pi; \pi]$.
2. $\cos^2(x) \geq \cos(2x)$ sur $I = [0; 2\pi]$.
3. $\sqrt{3}\tan(x) - 1 \leq 0$ sur $I = [-\pi; \pi]$.

Exercice 7 : Démontrer les identités suivantes, dans chaque cas, préciser le domaine de validité :

$$A)\ \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \tan(\frac{x}{2}) \qquad B)\ \tan(\frac{\pi}{4}+x) + \tan(\frac{\pi}{4}-x) = \frac{2}{\cos(2x)}$$

Exercice 8 : On considère le repère orthonormée $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Représenter ce repère et le cercle trigonométrique. On prendra $||\vec{i}|| = 5$ carreaux.
2. Représenter un angle $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$ fixé dans le cercle puis représenter pour ce θ, les vecteurs suivants :
   (a) $u_\theta = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$.
   (b) $v_\theta = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}$.
   (c) $u_{-\theta}$ (*simplifier*)
   (d) $v_{-\theta}$ (*simplifier*)

Exercice 9 : Résoudre les équations suivantes où x est une inconnue et α un paramètre réel :

1. $x\sin(\alpha) + \cos(2\alpha) = 1$
2. $2x^2 - 2(\cos(\alpha) + \sin(\alpha))x + \sin(2\alpha) = 0$

Exercice 10 : Montrer que pour tout $x \neq 0[\pi]$ et tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\cos(x)\cos(2x)\ldots\cos(2^n x) = \frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\sin(x)}$$

Exercice 11 : Un peu de logique !

1. Montrer que la proposition :
   "$(\exists x \in \mathbf{R},\ \cos(x) = 0)$ **et** $(\exists x \in \mathbf{R},\ \sin(x) = 0)$" est vraie.
2. Montrer que la proposition :
   "$(\exists x \in \mathbf{R},\ \cos(x) = 0$ **et** $\sin(x) = 0)$" est fausse.