Planches complètes CCP 2016.

1. a. Déterminer dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ la matrice de l'endomorphisme f défini par :
$\forall\ P \in \mathbb{R}_n[X],\ f(P) = (X-a).P' + P - P(a)$, avec : $a \in \mathbb{R}$.
Déterminer son image, son noyau et ses éléments propres.

   b. On note : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{x^n.e^x}{n!}$.
Etudier la convergence simple et uniforme de la suite (f_n), puis de la série $\sum_{n\geq 0} f_n$.

2. a. Déterminer la limite de la suite de terme général : $a_n = \int_0^1 \left(\dfrac{1+t}{2}\right)^n .dt$.

Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ a_n \geq \dfrac{1}{n+1}$.

Préciser le rayon de convergence et le domaine de définition de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n$.

   b. On note f l'application qui à un polynôme : $P \in \mathbb{R}_6[X]$, fait correspondre le reste de la division euclidienne de P par : $D = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.
Montrer que f est linéaire de $\mathbb{R}_6[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ et donner sa matrice dans les bases canoniques de ces espaces.
Donner la dimension et une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$.

3. a. Montrer que : $\forall\ n \geq 3$, l'équation : $e^x = n.x$, admet deux racines : $0 \leq x_n < y_n$.
Etudier la monotonie des suites (x_n) et (y_n) et en déduire qu'elles convergent vers une limite à déterminer.
Montrer que : $x_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, trouver un équivalent de $x_n - \dfrac{1}{n}$ en +∞, et en déduire un développement asymptotique de x_n.
Montrer que pour tout : $\varepsilon > 0$, on a : $y_n \leq (1+\varepsilon).\ln(n)$, à partir d'un certain rang.

   b. Soient $f_1,...,f_n$, des endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie tels que :
$f_1 + ... + f_n = id_E$, et : $\forall$ i ≠ j, $f_i o f_j = 0$.
Montrer que ces endomorphismes sont des projecteurs et que E est la somme directe de leurs images.

4. a. Montrer que la suite (u_n) définie par : $u_0 \in [0,\pi]$, et : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 - \cos(u_n)$,
converge vers 0.
Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

   b. Soient E un espace vectoriel euclidien et : $a \in$ E, $a \neq 0$.
Déterminer les valeurs : $\alpha \in \mathbb{R}$, pour lesquelles u défini par : $\forall\ x \in$ E, $u(x) = \alpha.(x|a).a - x$,
est une isométrie de E.

5. a. Montrer que la suite de fonctions (f_n) définies sur [0,1] par :

   • $\forall\ n \geq 0$, $f_n(0) = 0$, et : $\forall\ x \in]0,1]$, $f_n(x) = x.\left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^{2.n}$,

converge simplement mais pas uniformément sur [0,1] vers une fonction f que l'on précisera.

   b. On donne un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension finie : $n \geq 1$.
On note par ailleurs : $\forall\ m \in \mathbb{N},\ K_m = \ker(u^m)$, et : $I_m = \mathrm{Im}(u^m)$.

   • On suppose que u est injectif.

Déterminer K_m, et I_m pour tout entier m.

• On suppose u non injectif.

Montrer que : $\forall\ m \geq 1,\ K_m \subset K_{m+1}$, et : $I_{m+1} \subset I_m$.

Montrer que :

- $\exists\ p \in \{1,...,n\},\ K_p = K_{p+1}$, et : $I_p = I_{p+1}$,
- $\forall\ q \in \mathbb{N},\ K_p = K_{p+q}$, et : $I_p = I_{p+q}$,
- $E = K_p \oplus I_p$.

6. a. Soit : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $rg(A)$, puis $rg(A^2)$, et montrer que $\ker(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont supplémentaires.

En déduire que A est semblable à : $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, avec : $B \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{R})$.

Donner le spectre de B et en déduire que A est diagonalisable.

b. On note N la variable aléatoire représentant le nombre n de jetons tirés au cours d'un jeu.

On suppose que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ P(N=n) = \dfrac{1}{2^n}$.

Si n est pair, le joueur gagne n jetons sinon, il en perd n.

Donner la probabilité de gagner, le gain algébrique G puis son espérance.

7. a. Donner la nature des intégrales : $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin(t)}}{t}.dt$, et : $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t).\sin\left(\frac{1}{t}\right).dt$.

b. Soit : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

Déterminer les valeurs propres de A ainsi qu'une matrice diagonale D semblable à A.

Montrer que si une matrice M commute avec D, alors elle est diagonale.

Déterminer toutes les matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telles que : $M^7 + M + I_3 = A$.

8. a. Nature et somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^{(-1)^n}.x^n$.

b. Montrer que f, défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall\ P \in \mathbb{R}_n[X],\ f(P)(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} P(t).dt$,

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, et calculer sa trace.

9. a. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions définies par : $f_n(x) = \cos\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right).x\right)$.

Y a-t-il convergence uniforme sur tout segment ? sur $\mathbb{R}$?

b. On munit : $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$, du produit scalaire : $(f|g) = \displaystyle\int_0^1 (f(t).g(t) + f'(t).g'(t)).dt$.

Montrer que (ch, sh) est une base de : $A = \{h \in C^2([0,1],\mathbb{R}),\ h'' = h\}$.

Montrer que si : $f \in A$, alors : $\forall\ g \in E,\ (f|g) = f'(1).g(1) - f'(0).g(0)$.

Calculer $(ch|sh)$, $\|ch\|^2$, $\|sh\|^2$.

Montrer que : $\forall\ f \in A,\ \forall\ g \in B = \{h \in E,\ h(1) = h(0) = 0\},\ (f|g) = 0$.

Pour : $f \in H = \{h \in \mathsf{E},\ h(1)=1,\ h(0)=ch(1)\}$, calculer $(f|ch)$ et $(f|sh)$.

Donner les coordonnées dans la base (ch, sh) de la projection orthogonale de : $f \in H$, sur A.

Déterminer $\inf_{f\in H} \int_0^1 ((f'(t))^2 + (f(t))^2).dt$.

10. a. Reconnaître l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par : $A = \frac{1}{3}.\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

b. Soient $X_1,...,X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Bernoulli de paramètre :

$p_n > 0$, et telles que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n} p_k = p$.

Montrer que : $\forall\ \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n} X_k - p\right| > \varepsilon\right) = 0$.

11. a. Montrer que si : $M \in Gl_n(\mathbb{C})$, est de carré diagonalisable, alors elle est diagonalisable.
(on pourra utiliser un polynôme annulateur scindé à racines simples).

Soient A, B des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et : $N = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

En calculant N^{-1}, montrer que : $N \in Gl_{2.n}(\mathbb{C})$.

Calculer N^2, puis $P(N^2)$, pour : $P \in \mathbb{C}[X]$.

On suppose que N est diagonalisable : montrer que $A.B$ est diagonalisable.
Qu'en est-il de la réciproque ?

b. Pour : $\alpha > 1$, et : $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$, et : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Montrer que : $R_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1).n^{\alpha-1}}$, puis étudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{R_n}{S_n}$.

12. a. Donner les éléments propres de : $A(t) = \begin{pmatrix} 1-3.t & 4.t \\ -2.t & 1+3.t \end{pmatrix}$.

Si $A(t)$ est diagonalisable, donner une matrice P inversible qui diagonalise $A(t)$.

Résoudre le système différentiel : $Y'(t) = A(t).Y(t)$.

b. Soit X une variable aléatoire suivante une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, avec : $\lambda > 0$.

Calculer l'espérance de : $Y = X^2 + 1$, puis préciser $P(2.X < Y)$.

Calculer la probabilité que X soit pair.
Y a-t-il plus de chances que X soit impair ?

13. a. On veut trouver les matrices symétriques réelles de taille n (où : $n \geq 3$) vérifiant : $A^3 + 4.A^2 + 5.A = 0$.
Montrer que de telles matrices sont diagonalisables et les déterminer.

b. Montrer que la fonction f donnée par : $\forall\ x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3+x^3}$, est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

Trouver trois réels a, b, c tels que : $\frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{1+x} + \frac{b.x+c}{1-x+x^2}$.

En déduire $f(0)$, puis calculer la limite de f en +∞.

14. a. Donner le domaine de convergence Δ de la série de fonctions u_n définies par :

$\forall\ n \geq 2$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n.\ln(n)}$.

Y a-t-il convergence normale de cette série sur Δ ?
On note S sa somme et R_n le reste d'ordre n.

Montrer que : $\forall\ n \geq 2$, $\forall\ x \in \Delta$, $|R_n(x)| \leq \dfrac{1}{\ln(n+1)}$, puis que S est continue sur Δ.

S est-elle intégrable sur Δ ?

b. Soit A une matrice carrée de taille 2 telle que : $A^2 = {}^tA$, et telle que 0 soit une valeur propre de A.
Déterminer les valeurs propres de A et en déduire que A est nulle ou orthogonalement semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

15. a. Trouver trois réels a, b, c tels que : $\dfrac{2.x+1}{x.(x+1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}$.

Montrer que l'intégrale $\int_0^1 t.\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor .dt$ converge et donner sa valeur comme somme d'une série.

Quelle est cette somme ?

b. Pour n pair supérieur ou égal à 2, on note : $A_n = \begin{pmatrix} 1 & n & 1 & \cdots & n \\ 2 & n-1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 3 & n-2 & 3 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & n & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer qu'une matrice et sa transposée ont même spectre.
En déduire que A_n est diagonalisable et préciser ses éléments propres.

16. a. Soit A une matrice carrée réelle.
Montrer que A est symétrique à valeurs propres positives si et seulement si il existe une matrice B telle que : $A = {}^tB.B$.

b. Soient X, Y deux variables aléatoires suivant des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p et q.
On suppose que la covariance de X et de Y est nulle.
Montrer que : $P(X=1, Y=1) = P(X=1).P(Y=1)$.
Montrer que X et Y sont indépendantes.

17. a. On considère deux variables aléatoires X et Y telles que X suit une loi de Poisson de paramètre λ et pour tout : $n \in \mathbb{N}$, Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}$(n,p) pour la probabilité conditionnelle $P_{(X=n)}$.

Déterminer la loi conjointe de (X, Y), puis la loi de Y.

Déterminer la loi de : $Z = X - Y$.

Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

b. On note E l'ensemble $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que ϕ, donnée par : $\forall\ f \in E$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $\phi(f)(x) = f'(x) - x.f(x)$,
est un endomorphisme de E.
Déterminer ses valeurs propres et ses vecteurs propres puis déterminer $\ker(\phi^2)$.