Programme ECS2 de la semaine 5.
Réduction

Du 26 au 30 septembre 2016

A Cours à connaitre parfaitement

Rappel : vous devez toujours être capable de donner des exemples !

Révisions ECS1 faites pendant le cours ou lors de recherche d'exercices et problèmes

— Prop : Etant donnés un $\mathbb{K}$ ev E de dimension finie et V un sev de E.

$$V = E \Longleftrightarrow dim(V) = dim(E)$$

— Prop : Etant donnés un $\mathbb{K}$ ev E de dimension finie notée n et $\mathscr{F}$ une famille de n vecteurs de E.
$\mathscr{F}$ est libre $\boxed{\text{ssi}}$ elle est génératrice de E.

— Définition de la somme de s.e.v d'un e.v.
Rappel de la définition de s.e.v d'un e.v en *somme directe*. Caractérisation simple.

Programme de ECS2

E désigne un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie, f un endomorphisme de E.

— Notation $E_\lambda(f)$.

— Définition : valeur propre, vecteur propre d'un endomorphisme. Def : spectre d'un endomorphisme (Notation $\mathrm{Sp}(f)$).
Prop : Les assertions suivantes sont deux à deux équivalentes :
(0) $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de f
(1) $E_\lambda(f)$ contient au moins un vecteur non nul.
(2) $\dim(E_\lambda(f) \geq 1$.
(3) L'endomorphisme $f - \lambda.id_E$ n'est pas bijectif.

— **Théorème ["valeurs propres et polynôme annulateur"]** . Si P est un polynôme annulateur de f alors les valeurs propres de f sont des racines de P.

— **Propriétés des éléments propres**
Prop : Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.
Th : f admet un nombre fini de valeurs propres, nombre inférieur à la dimension de E. Par ailleurs les sev propres de f sont en somme directe.
Prop : La somme des dimensions des s.e. propres de f est inférieure à la dimension de E.

— **Définition[endo diagonalisable]** f est dit diagonalisable ssi il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que : $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonale.
Prop : f est dit diagonalisable ssi il existe une base $\mathscr{B}$ de E formée de vecteurs propres de f.

— **Théorème [CS de diagonalisabilité]** Un endomorphisme d'un e.v. de dimension finie E qui admet exactement $\dim(E)$ valeurs propres est diagonalisable et ses sous espaces propres sont tous de dimension 1.

— **Théorème [CNS de diagonalisibilité]** Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie et f un endomorphisme de E.
(f est diagonalisable)$\Longleftrightarrow$ (E est somme directe des s.e. propres de f $\Longleftrightarrow$ (la somme des dimensions des s.e. propres de f égale la dimension de E)

— **Eléments propres d'une matrice carrées** Définitions. Prop : $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre d'une matrice A ssi $A - \lambda.I$ n'est pas inversible. Spectre d'une matrice triangulaire, d'une matrice 2×2.

— **Remarque** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les éléments propres de A sont exactement les mêmes que ceux de l'endomorphisme : $X \mapsto AX$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Ainsi : A admet au plus n valeurs propres et ses se propres sont en somme directe.

— **Def** Une matrice carrée est dite diagonalisable ssi elle est semblable à une matrice diagonale.

— **prop** $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable ssi l'endomorphisme : $X \mapsto AX$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ l'est.

Ainsi : A est diagonalisable ssi la somme des dimension de ses se propres égale n.

— **Proposition** Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie, $\mathscr{B}$ une base de E ,f un endomoprhisme de E et A la matrice de f dans $\mathscr{B}$.

On a :

- $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(f)$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \dim(E_\lambda(A) = \dim(E_\lambda(f))$
- f est diagonalisable ssi A est diagonalisable .

— **Proposition** Deux matrices semblables ont même spectre.

B Techniques à maitriser

— Obtenir une information sur le spectre d'un endomorphisme (resp d'une matrice carrée) à partir d'un polynôme annulateur de cet endomorphisme (resp matrice carrée)

— Déterminer le spectre d'une matrice 2×2

— Déterminer le spectre d'une matrice triangulaire.

— Méthode pour savoir si une matrice A est diagonalisable et , le cas échéant donner P inversible et D diagonale telles que $D = P^{-1}AP$

C Classiques (ou questions de cours)

E désigne un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie et f un endomorphisme de E.

— **Exercice 1**

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Justifier le résultat à bien connaitre :

$$E_\lambda(f) = \{x \in E | f(x) = \lambda.x\}$$

2. Expliquez pourquoi si $\dim(E_\lambda(f)) = \dim(E)$ alors $f = \lambda.id_E$.

Exercice 2

Montrer la proposition du cours suivante :

Si P est un polynôme annulateur de f alors les valeurs propres de f sont des racines de P.

Exercice 3

Montrer qu'un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie qui admet exactement $\dim(E)$ valeurs propres est diagonalisable.

Exercice 4

Montrer qu'un projecteur est un endomorphisme diagonalisable.

Exercice 5

Montrer que la transposée d'une matrice diagonalisable est aussi diagonalisable.