CORRIGE MINES-PONTS 1 PC 2015 -
ASPECTS DE LA PROPULSION SPATIALE

Corrigé rédigé par Marc STRUBEL (marc.strubel@wanadoo.fr), relu par Nicole ADLOFF (nicole.adloff0212@orange.fr) .
Merci de nous faire part de vos remarques et commentaires !

I . Généralités :

I.A. Aspect cinétique –Lois de vitesse.

1. $\vec{p_f}(t)=m(t).v(t).\vec{u_z}$; $\vec{p_f}(t+dt)=m(t+dt).v(t+dt).\vec{u_z}=[m(t-D_m.dt)].v(t+dt).\vec{u_z}$
   $\vec{p_g}(t+dt)=D_m.dt.[-u+v(t+dt)]\vec{u_z}$

2. Le système fermé proposé est soumis uniquement à son poids :
   $\vec{P}=-m(t).g.\vec{u_z}$

   Le théorème de la résultante cinétique s'écrit :
   $$\frac{d\vec{p}(t)}{dt}=\sum \vec{F_{ext}}=\vec{P}$$
   On calcule :
   $$\frac{d\vec{p}(t)}{dt}=\lim_{dt\to 0}\frac{\vec{p_f}(t+dt)+\vec{p_g}(t+dt)-\vec{p_f}(t)}{dt}$$
   $$\frac{d\vec{p}(t)}{dt}=\frac{\lim_{dt\to 0} m(t).[v(t+dt)-v(t)].\vec{u_z}-D_m.dt.u.\vec{u_z}}{dt}$$
   $$\frac{d\vec{p}(t)}{dt}=m(t)\frac{dv.\vec{u_z}}{dt}-D_m.u.\vec{u_z}$$

   La projection du théorème de la résultante cinétique fournit donc bien :
   $$m(t)\frac{dv}{dt}-D_m.u=-m(t).g$$

3. L'intensité de la force de poussée est : $F=D_m.u$.
   La fusée décolle si $F > m_0.g$.

4. Avec un débit constant $D_m = m/\tau$, on calcule :
   $$I_S=\tau=\frac{m}{D_m}=\frac{m.u}{F}=\frac{m.u}{m.g}=\frac{u}{g}$$

5. L'intégration de l'équation (1), en utilisant :
   $$m(t) = m_0 - D_m.t$$
   donne :
   $$v(t)=u.\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right)-g.t$$

6. On a ici g = 0.

   L'adaptation de la solution précédente donne :

$$\Delta v = u\,.\ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right)$$

7. On va supposer ici que le premier étage propulse l'ensemble de la fusée, après quoi ce premier étage se détache (sans vitesse relative), la vitesse de la fusée restant continue à cet instant.
   Le second étage est alors propulsé seul.

   Pour la propulsion due au premier étage de la fusée, on calcule :
   $$\Delta v_1 = u\,.\ln\left(\frac{m_t}{m_t - m_{ergol\,1}}\right) = 4.\ln\left(\frac{134}{134-100}\right) = 5{,}49\,km\,.h^{-1}$$

   Pour la propulsion du second étage de la fusée, on calcule :
   $$\Delta v_2 = u\,.\ln\left(\frac{m_{t2}}{m_{t\,2} - m_{ergol\,2}}\right) = 4.\ln\left(\frac{24}{24-20}\right) = 7{,}17\,km\,.h^{-1}$$

   Soit un accroissement total de vitesse pour la fusée à deux étages de :
   $$\Delta v_{2étages} = 5{,}49 + 7{,}17 = 12{,}7\,km\,.h^{-1}$$

   Pour une fusée de mêmes masses à un étage, on aurait :
   $$\Delta v_{1étage} = u\,.\ln\left(\frac{m_t}{m_t - m_{ergol}}\right) = 4.\ln\left(\frac{134}{134-120}\right) = 9{,}06\,km\,.h^{-1}$$

   Le gain pour deux étages est de 40%.

8. On calcule :
   $$m_c = m_u\left(\exp\left(\frac{\Delta v}{u}\right) - 1\right)$$
   Pour une propulsion chimique :
   $$m_{c1} = ¿\quad 1{,}25 \text{ tonnes}$$
   Pour une propulsion ionique :
   $$m_{c2} = ¿\quad 142 \text{ kg}$$

I.B. Aspect énergétique – Rendement propulsif du moteur fusée

9. La variation élémentaire d'énergie cinétique est :
   $$d\,E_c = \frac{1}{2}.dm\left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2$$
   d'où :
   $$P_{jet} = \frac{d\,E_c}{dt} = \frac{1}{2}.D_m.\left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2$$
   La puissance de la force de poussée est :
   $$P_{poussée} = \vec{F}.\vec{v} = D_m.u.v$$

10. On identifie la puissance gagnée à la puissance de poussée et la puissance totale dépensée à la somme de la puissance de poussée et de la puissance du jet par conversion parfaite de l'énergie.
    avec x = u/v
    $$\frac{P_{jet}}{P_{jet} + P_{poussée}} = \frac{D_m u.v}{\frac{D_m}{2}\left(u^2 - 2uv + v^2\right) + D_m uv} = \frac{2uv}{u^2 + v^2} = \frac{2x}{1 + x^2}$$

11. Le rendement est maximal pour x = 1, c'est-à-dire u = v et nul pour x = 0.

Lorsque u = v , l’énergie cinétique des gaz dans le référentiel terrestre est nulle : toute la puissance de poussée est transférée à la fusée.

II. Limites de la propulsion chimique

12. Le premier principe s'écrit :

$$dU + dEc = \delta W_{pression} + \delta W' + \delta Q$$

En notant w' le travail massique, q le transfert thermique massique, h l'enthalpie massique et e_c l'énergie cinétique massique, on obtient (cf cours) :

$$\Delta h + \Delta ec = w' + q$$

13. La transformation est isentropique, avec w'=0.

$$\Delta h = c_{pmassique}(T_{sortie} - T_c) \approx -\gamma R T_c/(\gamma-1)M$$

$$\Delta e_c = v^2_{sortie} / 2$$

On en déduit :

$$v_{sortie} = \sqrt{\frac{2\gamma R T_c}{(\gamma-1)M}}$$

14. On considère que le gaz éjecté est de la vapeur d'eau, de masse molaire M = 18 $g.mol^{-1}$.

On calcule alors :

$$v_{sortie} = 3{,}11 \text{ km.s}^{-1}.$$

L'ordre de grandeur correspond à celui qui est proposé à la question 7.

$$I_s = 3{,}11.10^3 / 9{,}8 = 318 \text{ s.}$$

III. Le moteur plasma micro-ondes

III.A. Principe de fonctionnement

15. L'électron est soumis :

- à la force de Lorentz due au champ électromagnétique de l'onde ; on sait que si les électrons sont non-relativistes on peut négliger la force magnétique ;
- à son poids qui est négligeable devant la force électrique ;
- aux forces d'interactions avec les autres électrons et ions, qui sont ici également négligées.

La seule force à considérer est donc la force électrique.

16. le principe fondamental appliqué à un électron s'écrit en complexes :

$$m\frac{d\underline{\vec{v}}_e}{dt} = -e\underline{\vec{E}}$$

On en déduit :

$$\underline{\vec{v}}_e = \frac{-e}{jm\omega}\underline{\vec{E}}$$

et

$$\vec{j} = -ne\,\underline{\vec{v}}_e = \frac{ne^2}{jm\omega}\vec{E}$$

d'où

$$\underline{\sigma} = \frac{ne^2}{jm\omega}$$

17. L'équation de Maxwell-Gauss permet de calculer car le plasma est initialement électriquement neutre :

$$\rho = \varepsilon_0 . \div \vec{E} = 0$$

L'équation de propagation (démonstration très classique, et pouvant être faite en complexes sans complexes !) est :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

On en déduit l'équation de dispersion du plasma :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

18. L'onde ne peut se propager dans le plasma que si :

$$\omega > \omega_p$$

Dans le cas contraire l'onde est réfléchie par le plasma et on a une onde évanescente dans le plasma.

19. L'équation vectorielle en question est le principe fondamental de la dynamique, qui s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e \vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

qui donne le système d'équations :

$$\begin{cases} m\acute{x} = -eB\acute{y} \\ m\acute{y} = eB\acute{x} \\ m\acute{z} = 0 \end{cases}$$

La troisième équation montre que pour une vitesse initiale nulle selon Oz, on a z = constante : le mouvement est dans le plan Oxy.
On peut poser u = x+iy pour résoudre le système couplé formé par les deux premières équations ; on obtient alors :

$$\acute{x}(t) = v_{ox} \cos(\omega_c t) + v_{oy} \sin(\omega_c t)$$
$$\acute{y}(t) = v_{oy} \cos(\omega_c t) - v_{ox} \sin(\omega_c t)$$

avec

$$\omega_c = \frac{eB}{m} = 3{,}51.10^{10} rad.s^{-1}$$

<u>Démonstration conforme au programme de 1ère année :</u>
En utilisant le fait que la puissance de la force magnétique est nulle, on en déduit que le mouvement est uniforme dans le plan Oxy.
En admettant que les particules évoluent avec un mouvement circulaire, leur accélération est donc a= v^2 / R où R est le rayon de la trajectoire, soit mv^2 / R = evB et ω_C = v / R = eB /m.

20. La puissance instantanée de la force électrique est :

$$p(t) = -e.E(t).\acute{y}(t)$$

En supposant également que $\omega \approx \omega_p$, on a $k \approx 0$.
Lorsque l'électron a éffectué un demi-tour, la vitesse $\acute{y}(t)$ change de signe, et E(t) change également de signe : la puissance garde le même signe ; si cette puissance est positive elle permet d'accélérer la charge.

21. On doit avoir :

$$\omega_p < \omega \approx \omega_c$$

On en déduit :

$$n_{max} = \frac{\varepsilon_0 B^2}{m} = 3{,}89.10^{17} m^{-3}$$

22. Les photons micro-ondes ont une énergie :

$$E = h.\nu = h.\omega/2\pi = 2{,}31.10^{-5}\ eV.$$

La contribution de la photo-dissociation est nulle.

III.B. Poussée

23. On exprime :

$$I = D_m.e/\mu.$$

24. Le théorème de l'énergie cinétique fournit :

$$v=\sqrt{\frac{2eV_a}{\mu}}$$

d'où :

$$F=D_m v=I\sqrt{\frac{2\mu V_a}{e}}$$

25. L'intensité est :

$$I = j.\pi.D^2/4$$

D'où :

$$F=\frac{2}{9}\frac{\pi\varepsilon_0 D^2}{d^2}V_a^2$$

26. $F_1 = 1{,}93.10^{-6}$ N pour un trou, soit :

$$F = 4{,}26.10^{-3}\ N\ ;\ v_{ions} = 3{,}21.10^4\ m.s^{-1}\ ;\ M = D_m.\Delta t = F.\Delta t/v_{ions} = 1{,}03\ kg.$$

La puissance cinétique dans le référentiel de la fusée est :

$$P_{cin} = ½.\ D_m.v_{ions}^2 = ½.F.v_{ions} = 68{,}4\ W.$$

27. Afin que la fusée reste neutre, il faut neutraliser également les ions produits.

28. $E_m = E_c + E_p = ½.mv^2 - GmM_T/r$
avec en exploitant le principe fondamental de la dynamique :

$$v^2 = GM_T/r$$

On en déduit :

$$E_c = -E_m$$

On a donc :

$$\Delta E_c = -\Delta E_m$$

Le frottement produit une diminution de l'énergie mécanique, donc une augmentation de l'énergie cinétique, et par là de la vitesse.

29. $E_m = E_p/2 = -GM_Tm/2r$
d'où :

$$\Delta E_m = GM_Tm\Delta r/2r^2 = -2{,}24.10^4\ J$$

30. Le travail de la force de frottements sur une révolution est :

$$W = F_{frott}.2\pi r$$

On en déduit grâce au théorème de l'énergie mécanique :

$$F_{frott} = 5{,}34.10^{-4}\ N.$$

Le moteur ionique permet donc de maintenir l'altitude du satellite.