TP Info n°4 2012-2013

Thème : suites et séries de fonctions.

Exercice 1.

Soit f une fonction que l'on définira ultérieurement.

Définir la suite de fonctions $g_n$donnée par : $g_n(x) = \frac{f(x)^2}{\sqrt{f(x)^2 + \frac{1}{n^2}}}$, comme une fonction de deux variables n et x.

```
> restart;
  g:=(n,x)->f(x)^2/sqrt(f(x)^2+1/n^2):
```

Choisir maintenant et définir une fonction f qui change de signe sur un segment [a,b] sans préciser cet intervalle ici mais qu'on utilisera ensuite.

Construire ensuite une liste indexée contenant les graphes des vingt premières fonctions g_n sur l'intervalle [a,b] choisi.

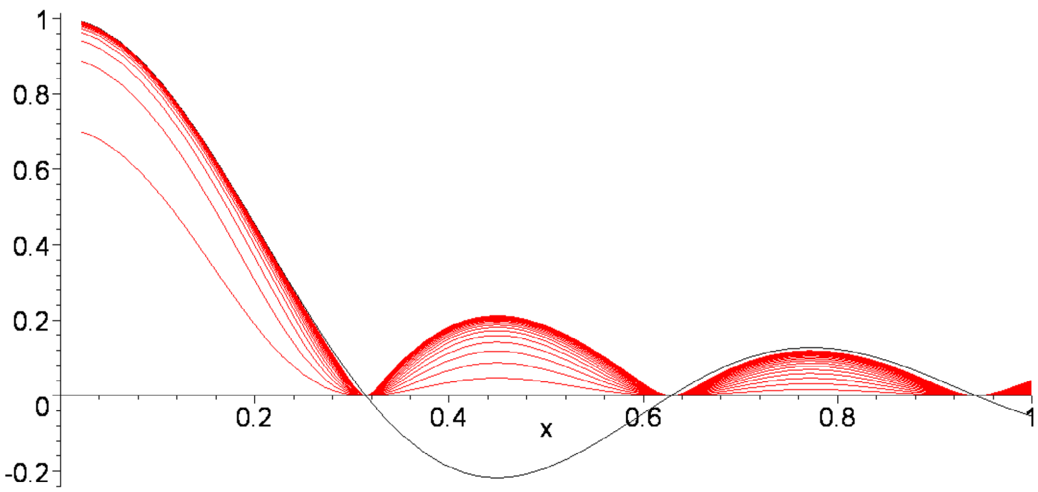
Afficher ensuite simultanément ces graphes sur une même figure, puis en les superposant à celui de la fonction f, toujours sur le segment [a,b] que vous avez choisi.

Les afficher dynamiquement ensuite, l'un après l'autre puis en conservant en arrière-plan le graphe de la fonction f.

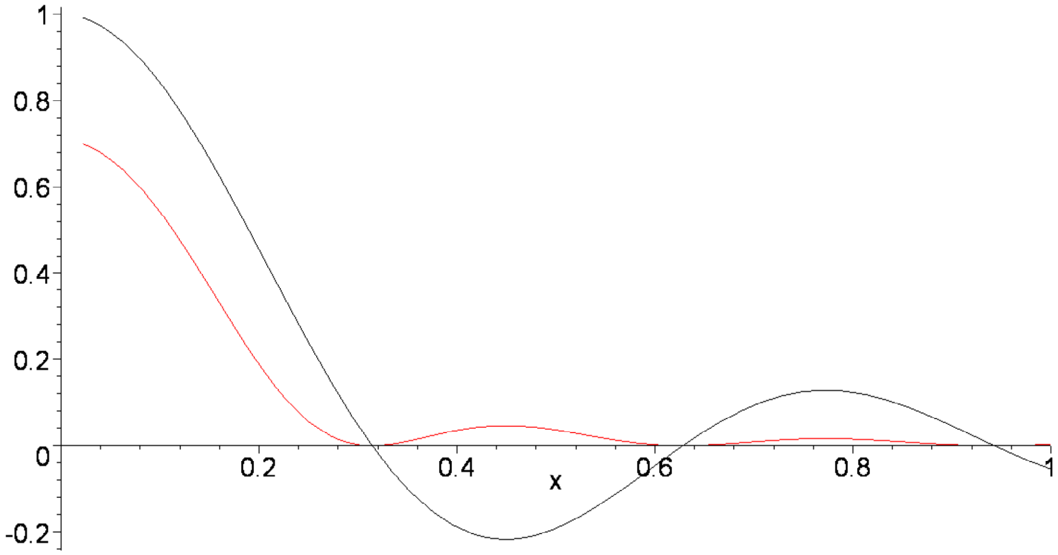
Pensez-vous qu'il y a convergence uniforme sur [a,b] ? Vers quelle fonction ?

```
> f:=x->sin(10*x)/(10*x);
  with(plots):
  plot_gn:=seq(plot(g(i,x),x=0..1,color=red),i=1..20):
  plot_f:=plot(f(x),x=0..1,color=black):
  display(plot_gn,plot_f);
```

$$f := x \to \frac{1}{10} \frac{\sin(10\,x)}{x}$$




```
> graphe_anime:=display(plot_gn,insequence=true):
  display(graphe_anime,plot_f);
```



Que pensez-vous de | f | comme limite ?

Exercice 2.

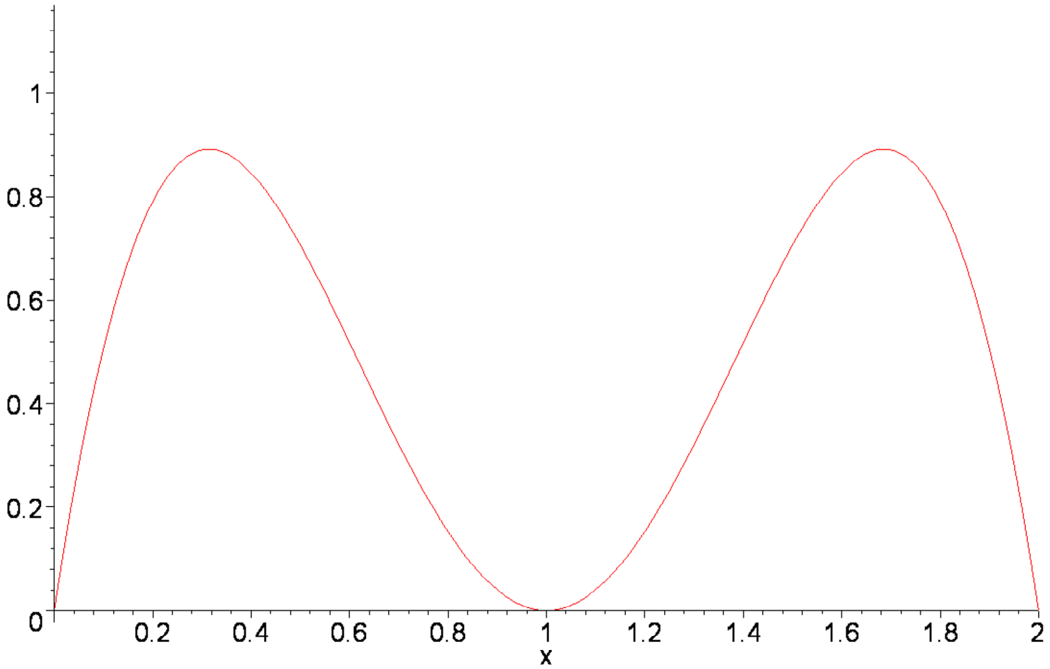
Etudier graphiquement si la suite de fonctions définie par : $f_n(x) = 4\,n\,(1-x)^{(2\,n)}\,\sin\left(\frac{\pi\,x}{2}\right)$,

vous paraît converger uniformément sur [0,2].

On pourra pour cela utiliser une animation des graphes des premières fonctions f_n.

Reprendre des suites ou séries de fonctions définies dans la feuille d'exercices (de la feuille 'suites et séries de fonctions') correspondante et examiner s'il y a convergence uniforme de ces suites et séries de fonctions.

```
> f:=(n,x)->4*n*(1-x)^(2*n)*sin(Pi*x/2):
> N:=30:
  display(seq(plot(f(i,x),x=0..2,color=red),i=1..N),insequence=
  true);
```



Exercice 3.

On va construire, pour une fonction f sur [0,1] une suite de polynômes (appelés polynômes de Bernstein) qui converge uniformément sur [0,1] vers f. (Pour la démonstration, voir en exercice).

Définir une fonction de deux variables, polynomial en x, par :

$$\mathrm{B}(n, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!\, \mathrm{f}\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{(n-k)}}{k!\,(n-k)!}.$$

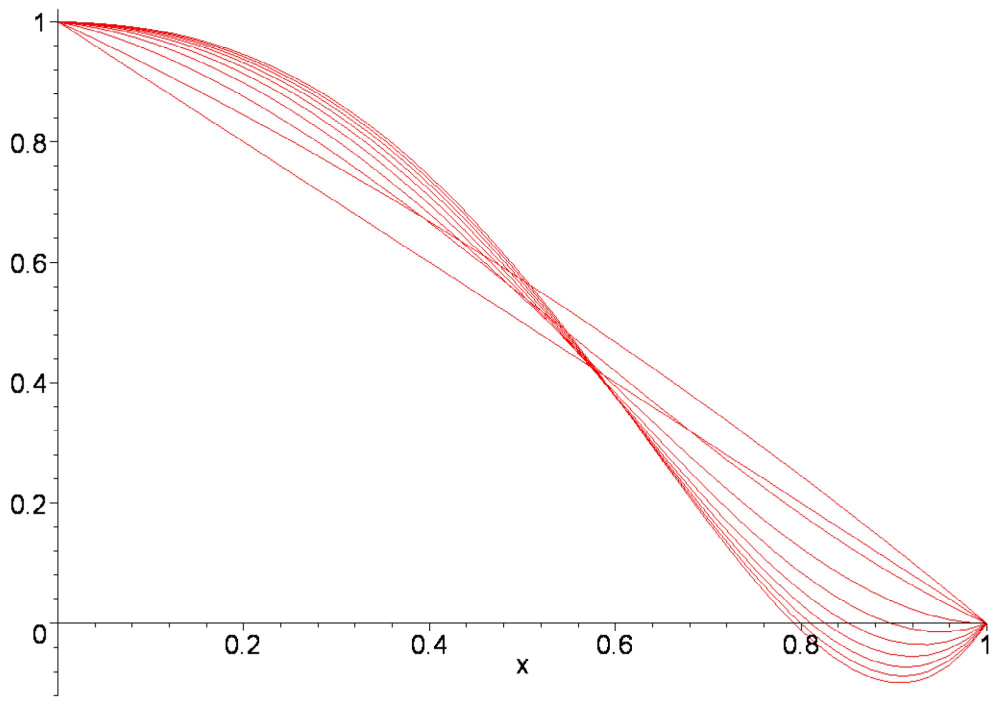
```
> restart;
  Bernstein:=(n,x)->sum(binomial(n,k)*f(k/n)*x^k*(1-x)^(n-k),k=0..n);
```

$$Bernstein := (n, x) \rightarrow \sum_{k=0}^{n} \mathrm{binomial}(n, k)\, \mathrm{f}\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{(n-k)}$$

Construire ensuite une liste des graphes des 10 premiers polynômes de Bernstein sur [0,1] pour la fonction : $x \rightarrow 2\,x^7 - 3\,x^3 + 1$ et tracer sur un même graphique ces 10 premiers polynômes. Reprendre la même chose en animant l'affichage des courbes pour les numéros de 1 à 46 par pas de 5.

Etudier ensuite le cas de la fonction : $x \rightarrow \sin(6\,x)$.

```
> with(plots):
  f:=x->2*x^7-3*x^3+1:
  n:=10:
  display(seq(plot(Bernstein(i,x),x=0..1),i=1..n));
```




```
> display(seq(plot(Bernstein(-4+5*i,x),x=0..1),i=1..n),insequence=true):
> f:=x->sin(6*x);
  n:=10;
```

```
display(seq(plot(Bernstein(-4+5*i,x),x=0..1),i=1..n),insequen
ce=true):
```

$$f := x \rightarrow \sin(6\,x)$$

$$n := 10$$

Améliorer la procédure précédente en faisant afficher simultanément à l'animation la véritable fonction.

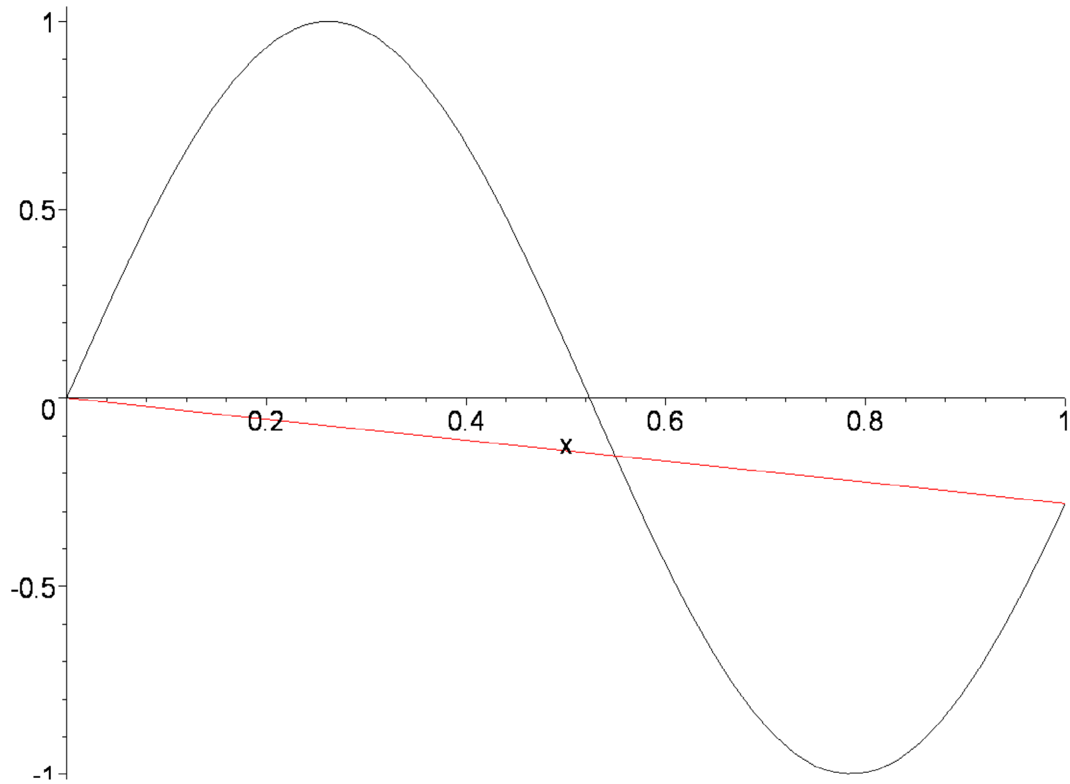
Pour cela vous pourrez construire deux graphes, l'un contenant la séquence des graphes des différents polynômes, l'autre la vraie fonction, et afficher ensuite les deux graphes simultanément.

```
> f:=x->2*x^7-3*x^3+1;
  n:=10:
  Approximations:=display(seq(plot(Bernstein(-4+5*i,x),x=0..1),
  i=1..n),insequence=true):
  VraieFonction:=plot(f(x),x=0..1,color=black):
  display(Approximations,VraieFonction):
```

$$f := x \rightarrow 2\,x^7 - 3\,x^3 + 1$$

```
> f:=x->sin(6*x);
  n:=10:
  Approximations:=display(seq(plot(Bernstein(-4+5*i,x),x=0..1),
  i=1..n),insequence=true):
  VraieFonction:=plot(f(x),x=0..1,color=black):
  display(Approximations,VraieFonction);
```

$$f := x \rightarrow \sin(6\,x)$$



Exercice 4.

Fonction de van der Waerden. (voir exercice).

Definir une fonction f de x sur [0,1], qui vaut x sur [0,1/2] et (1-x) sur [1/2,1].

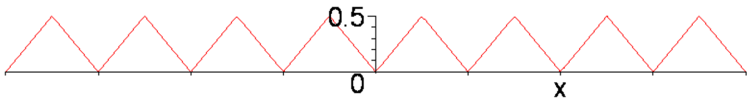
```
> restart;
  f:=proc(x) piecewise(x<(1/2),x,(1-x)) end;
```

$$f := \textbf{proc}(x)\ \text{piecewise}(x < 1/2, x, 1-x)\ \textbf{end}$$

On appellera plus généralement fp la fonction 1-périodique sur R qui coïncide avec la fonction précédente sur [0,1].

Tracer cette fonction fp sur [-4,+4].

```
> fp:=x->f(x-floor(x)):
> with(plots):
  plot(fp(x),x=-4..4);
```



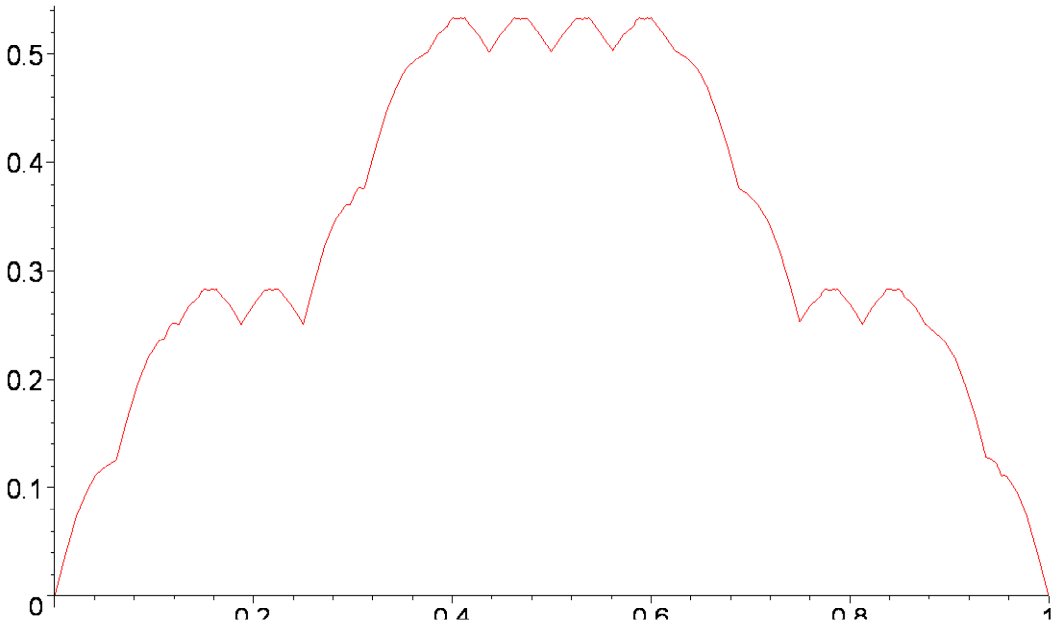
On note u_n la fonction qui à x fait correspondre $4^{(-n)}$ fp(x 4^n).
Construire une fonction S de deux variables n et x qui donne la n-ième somme partielle de la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

```
> S:=(n,x)->sum(4^(-k)*fp(x*4.^k),k=0..n);
```

$$S := (n, x) \to \sum_{k=0}^{n} 4^{(-k)}\ \text{fp}(x\ 4.^k)$$

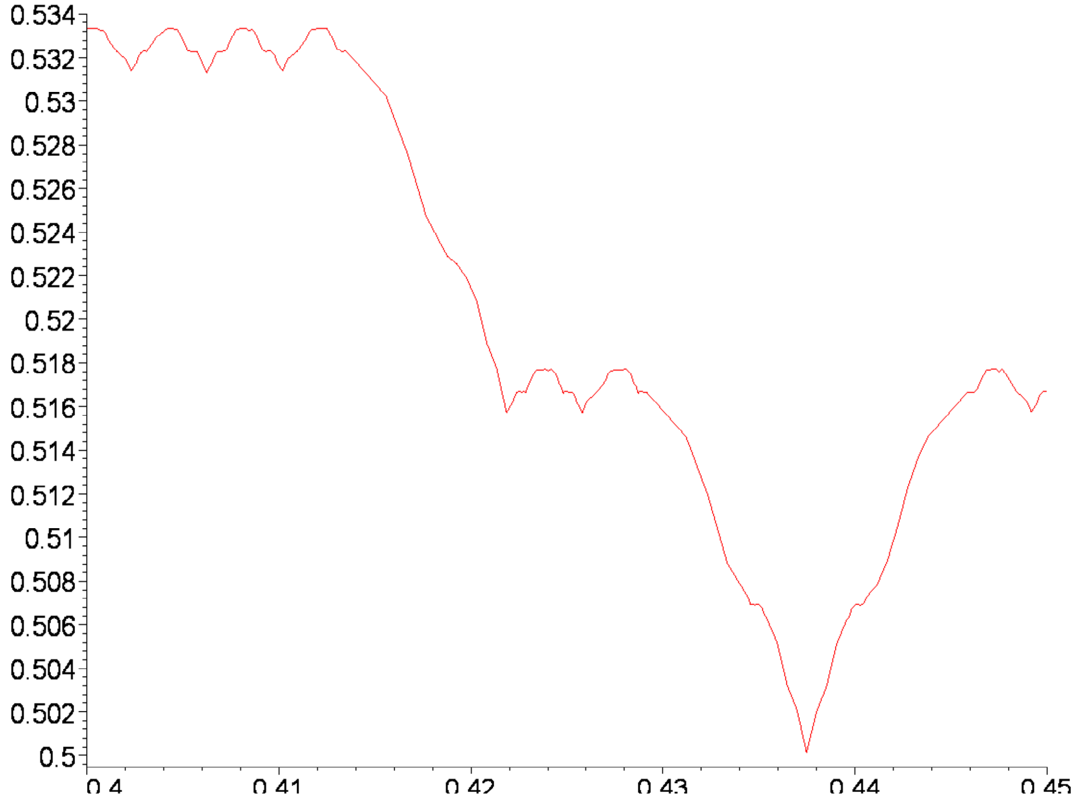
On montre (voir l'exercice cité en référence) que la série converge uniformément sur [0,1].
Tracer S(10,x) sur l'intervalle [0,1], puis S(100,x) sur des intervalles plus petits.
Explorer enfin la fonction limite grâce aux sommes partielles et constater qu'elle semble ne pas être dérivable.
Pour cela, on pourra comparer son graphe (sur un intervalle très court) avec celui d'une fonction classique, dérivable).

```
> plot(S(10,x),x=0..1);
```

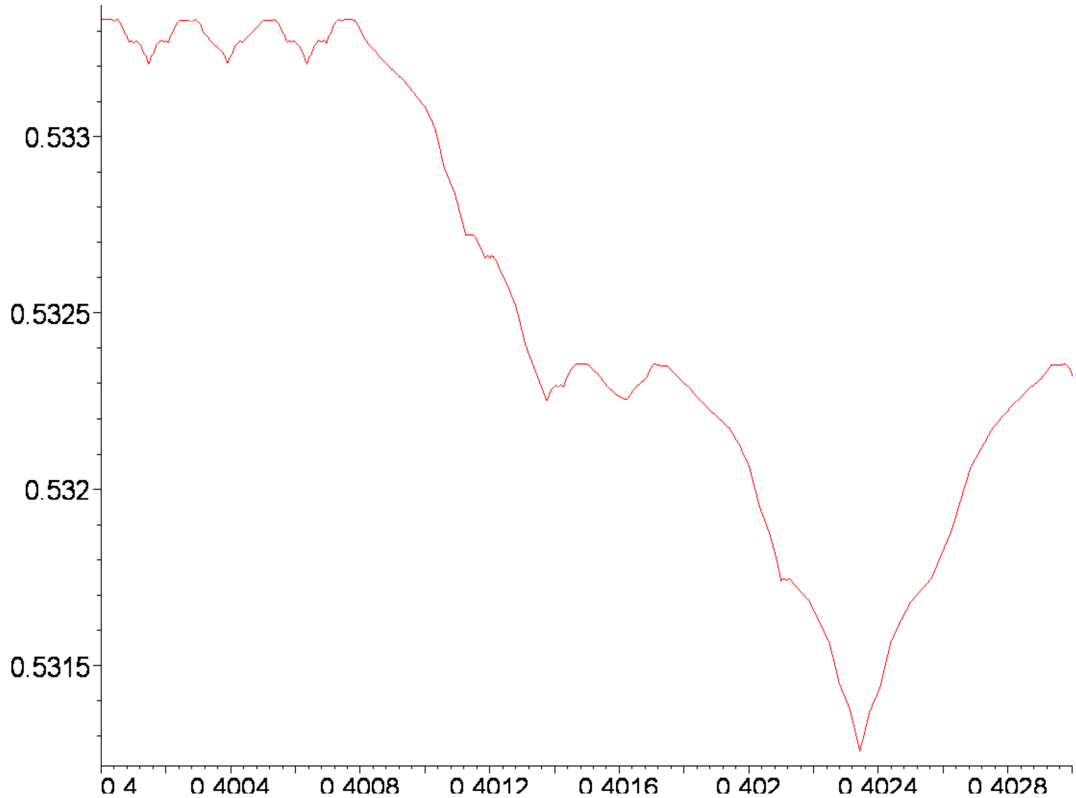



```
> display(seq(plot(S(i,x),x=0..1),i=1..7),insequence=true):
```

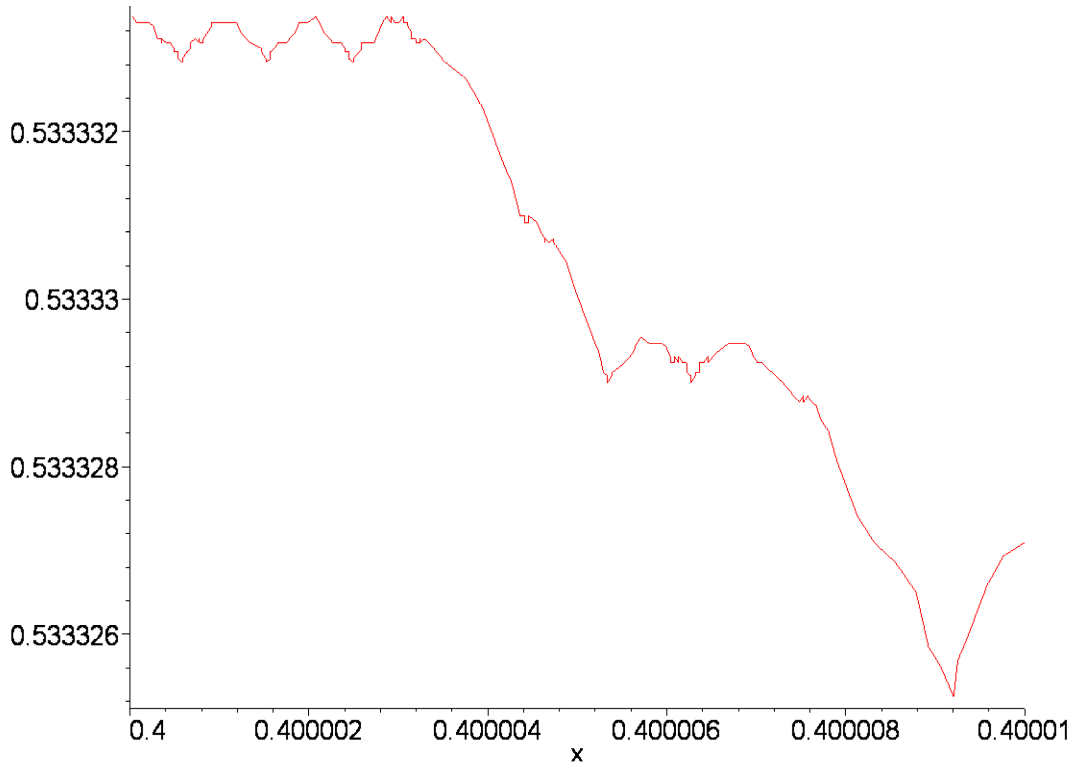
```
> plot(S(100,x),x=0..1):
> plot(S(100,x),x=0.4..0.45);
```




```
> plot(S(100,x),x=0.4..0.403);
```




```
> plot(S(100,x),x=0.4..0.40001);
```


0.533332
0.53333
0.533328
0.533326
0.4
0.400002
0.400004
0.400006
0.400008
0.40001
x