

TP Info n°3 2012-2013

Thème : algèbre linéaire (déterminants et réduction).

Exercice 1.

— Définir la matrice : $A := \begin{bmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{bmatrix}$.

```
> restart;
A:=matrix(3,3,[(b+c)^2,b^2,c^2,a^2,(c+a)^2,c^2,a^2,b^2,(a+b)^2]);
```

$$A := \begin{bmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{bmatrix}$$

— Calculer son déterminant, puis le simplifier.

```
> with(linalg):
DetA:=det(A);
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
DetA:=12 b^2 c^2 a^2+6 b^3 c^2 a+6 b^2 c a^3+6 b^3 c a^2+2 b^4 c a+6 b c^3 a^2+6 b^2 c^3 a
+6 b c^2 a^3+2 b c a^4+2 c^4 a b
> factor(DetA);
```

$$2 a c b (b + c + a)^3$$

Exercice 2 (déterminant de Vandermonde).

— Ecrire une procédure qui définit une matrice de Vandermonde avec comme paramètre une liste notée x (et éventuellement le nombre de termes dans cette liste).
Calculer le déterminant de cette matrice pour une liste $[x_1, x_2, x_3, x_4]$, puis pour une liste de quatre valeurs numériques.
Comparer la valeur numérique et la valeur théorique obtenues.

```
> restart:
VDM:=proc(x) local n,A,i,j;
n:=nops(x);
A:=matrix(n,n);
for i from 1 to n do
  for j from 1 to n do
    A[i,j]:=x[i]^(j-1);
  od;
end;
```

```

od:
evalm(A);
end;

VDM := proc(x)
local n, A, i, j;
    n := nops(x);
    A := matrix(n, n);
    for i to n do for j to n do A[i, j] := x[i]^(j - 1) od od;
    evalm(A)
end

> with(linalg):
det(VDM([x[1], x[2], x[3], x[4]]));
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace

$$\begin{aligned}
& x_2^2 x_3^3 x_4^2 - x_2^3 x_3^2 x_4^3 - x_3^2 x_2^3 x_4^2 + x_3^3 x_2^2 x_4^3 + x_4^2 x_2^3 x_3^2 - x_4^3 x_2^2 x_3^3 - x_1^2 x_3^3 x_4^2 + x_1^3 x_3^2 x_4^3 \\
& + x_3^2 x_1^3 x_4^2 - x_3^3 x_1^2 x_4^3 - x_4^2 x_1^3 x_3^2 + x_4^3 x_1^2 x_3^3 + x_1^2 x_2^3 x_4^2 - x_1^3 x_2^2 x_4^3 - x_2^2 x_1^3 x_4^3 \\
& + x_2^3 x_1^2 x_4^2 + x_4^2 x_1^3 x_2^2 - x_4^3 x_1^2 x_2^3 - x_1^2 x_2^3 x_3^2 + x_1^3 x_2^2 x_3^3 + x_2^2 x_1^3 x_3^2 - x_2^3 x_1^2 x_3^3 \\
& - x_3^2 x_1^3 x_2^2 + x_3^3 x_1^2 x_2^3
\end{aligned}$$

> VDMx:=factor(%);

$$VDMx := (-x_4 + x_3)(x_2 - x_4)(x_2 - x_3)(-x_4 + x_1)(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)$$

> det(VDM([1, 3, 4, 6]));
180
> x:=[1, 3, 4, 6];
VDMx;

$$x := [1, 3, 4, 6]$$

180

```

Exercice 3 (exercice ENSAM)

 Soit : $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$, où a et b sont deux complexes.

Définir la matrice A.

A quelle condition A est-elle diagonalisable ?

En supposant cette condition réalisée, on appelle B une base de vecteurs propres et P la matrice de passage de la base canonique à la base B.

Vérifier que $P^{(-1)} A P$ est bien diagonale (on utilisera les fonctions indiquées en haut de page).

On commence évidemment par définir la matrice A.

```

> restart:
with(linalg):
A:=matrix(5,5,[a,0,0,0,b,0,0,0,1,2,1,0,0,b,0,a,0,b,0,0,

```

```
0,a]);
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
```

$$A := \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

On calcule ensuite les éléments propres de A.

```
> eigenvalues(A);
eigenvectors(A);
```

```
2, -b + a, b + a, -b + a, b + a
[-b + a, 2, {[1, 0, 0, 0, -1], [0, 1, 0, -1, 0]}],
[ b + a, 2, {[1, 0, 0, 0, 1], [0, 1/2 b + 1/2 a - 1, 1, 1/2 b + 1/2 a - 1, 0]} ],
[2, 1, {[0, 0, 1, 0, 0]}]
```

Il y a alors plusieurs cas à distinguer suivant que les valeurs propres sont distinctes ou pas.

Premier cas: $a - b = a + b = 2$.

```
> a:=2;
b:=0;
A:=matrix(5,5,[a,0,0,0,b,0,a,0,b,0,0,1,2,1,0,0,b,0,a,0,b,0,0,
0,a]);
eigenvectors(A);
```

```
a:=2
b:=0
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

```
[2, 5, {[0, 0, 1, 0, 0], [1, 0, 0, 0, 0], [0, -1, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 1]}]
```

La matrice n'est dans ce cas pas diagonalisable.

Deuxième cas: $a - b = a + b$ (distincts de 2).

```
> a:='a';
b:=0;
A:=matrix(5,5,[a,0,0,0,b,0,a,0,b,0,0,1,2,1,0,0,b,0,a,0,b,0,0,
0,a]);
Vects:=[eigenvectors(A)];
```

```
a:=a
b:=0
```

$$A := \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$Vects := [[a, 4, \{[1, 0, 0, 0, 0], [0, -1, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 0, 1], [0, -2 + a, 1, 0, 0]\}],$
 $[2, 1, \{[0, 0, 1, 0, 0]\}]]$

La matrice est dans ce cas diagonalisable. Diagonalisons-la...

> $P := \text{transpose}(\text{matrix}(5, 5, [\text{op}(Vects[1][3]), \text{op}(Vects[2][3])]));$

$$P := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 + a & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> $\text{simplify}(\text{evalm}(P^{(-1)} \& A \& P));$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Remarque: essayez sans 'simplify'...

Troisième cas: $a + b = 2$ (distinct de $a - b$).

> $a := 'a';$

$b := 2 - a;$

$A := \text{matrix}(5, 5, [a, 0, 0, 0, b, 0, a, 0, b, 0, 0, 1, 2, 1, 0, 0, b, 0, a, 0, b, 0, 0,$
 $0, a]);$

$\text{eigenvectors}(A);$

$a := a$

$b := 2 - a$

$$A := \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 2 - a \\ 0 & a & 0 & 2 - a & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 - a & 0 & a & 0 \\ 2 - a & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$[2, 3, \{[0, 0, 1, 0, 0], [1, 0, 0, 0, 1]\}], [2a - 2, 2, \{[-1, 0, 0, 0, 1], [0, -1, 0, 1, 0]\}]]$

La matrice n'est pas diagonalisable.

Quatrième cas : $a - b = 2$ (distinct de $a + b$).

> $a := 'a';$

$b := a - 2;$

$A := \text{matrix}(5, 5, [a, 0, 0, 0, b, 0, a, 0, b, 0, 0, 1, 2, 1, 0, 0, b, 0, a, 0, b, 0, 0,$
 $0, a]);$

$Vects := \text{eigenvectors}(A);$

$a := a$

$b := -2 + a$

$$A := \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & -2+a \\ 0 & a & 0 & -2+a & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2+a & 0 & a & 0 \\ -2+a & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$Vects := [2\ a - 2, 2, \{[1, 0, 0, 0, 1], [0, -2 + a, 1, -2 + a, 0]\}],$

$[2, 3, \{[0, 0, 1, 0, 0], [-1, 0, 0, 0, 1], [0, -1, 0, 1, 0]\}]$

Ici, la matrice est diagonalisable.

> $P := \text{transpose}(\text{matrix}(5, 5, [\text{op}(Vects[1][3]), \text{op}(Vects[2][3])]));$

$$P := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2+a & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2+a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> $\text{simplify}(\text{evalm}(P^{(-1)} \& A \& P));$

$$\begin{bmatrix} 2\ a - 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\ a - 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dernier cas: les trois valeurs propres sont distinctes. La matrice est alors diagonalisable.

> $a := 'a';$

$b := 'b';$

$A := \text{matrix}(5, 5, [a, 0, 0, 0, b, 0, a, 0, b, 0, 0, 1, 2, 1, 0, 0, b, 0, a, 0, b, 0, 0, 0, a]);$

$Vects := \text{eigenvectors}(A);$

$P := \text{transpose}(\text{matrix}(5, 5, [\text{op}(Vects[1][3]), \text{op}(Vects[2][3]), \text{op}(Vects[3][3])]));$

$a := a$

$b := b$

$$A := \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$Vects := \left[b + a, 2, \{[1, 0, 0, 0, 1], \left[0, \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a - 1, 1, \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a - 1, 0 \right]\} \right],$
 $[2, 1, \{[0, 0, 1, 0, 0]\}], [-b + a, 2, \{[-1, 0, 0, 0, 1], [0, -1, 0, 1, 0]\}]$

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a - 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a - 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> `simplify(evalm(P^(-1)&*A&*P));`

$$\begin{bmatrix} b+a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b+a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b+a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b+a \end{bmatrix}$$

Exercice 4

— Résoudre avec Maple le système suivant, d'inconnues x, y, z, de paramètres a et b :

$$x.(1+\sin(a)) + y.\sin(2.a) + z.\sin(3.a) = \sin(4.a)$$

$$x.\sin(2.a) + y.\sin(3.a) + z.\sin(4.a) = \sin(5.a)$$

$$x.\sin(3.a) + y.\sin(4.a) + z.\sin(5.a) = \sin(6.a)$$

$$x.\sin(4.a) + y.\sin(5.a) + z.\sin(6.a) = b$$

On commencera par résoudre un système 3x3 (sans la commande solve) puis on examinera la compatibilité des solutions avec la quatrième équation.

Ce n'est pas un système carré. On commence par étudier les trois premières équations:

> `restart;`

`A:=matrix(3,3,[(1+sin(a)),sin(2*a),sin(3*a),sin(2*a),sin(3*a),sin(4*a),sin(3*a),sin(4*a),sin(5*a)]);`

`B:=matrix(3,1,[sin(4*a),sin(5*a),sin(6*a)]);`

$$A := \begin{bmatrix} 1 + \sin(a) & \sin(2a) & \sin(3a) \\ \sin(2a) & \sin(3a) & \sin(4a) \\ \sin(3a) & \sin(4a) & \sin(5a) \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} \sin(4a) \\ \sin(5a) \\ \sin(6a) \end{bmatrix}$$

> `with(linalg):`

`DetA:=det(A);`

Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace

$$\text{DetA} := \sin(3a)\sin(5a) - \sin(4a)^2 + \sin(a)\sin(3a)\sin(5a) - \sin(a)\sin(4a)^2 \\ - \sin(2a)^2\sin(5a) + 2\sin(2a)\sin(3a)\sin(4a) - \sin(3a)^3$$

On simplifie un peu ça :

> `simplify(DetA);`

$$-1 + \cos(a)^2$$

Donc pour a différent de 0 ou de π modulo π , les trois premières équations constituent un système de Cramer, et on obtient x, y et z en résolvant le système des trois premières

équations:

```
> solutions:=evalm(A^(-1)*B):
```

Infernal (je ne l'ai donc pas affiché) ! Là encore, on simplifie :

```
> solutions:=simplify(solutions);
```

$$solutions := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \cos(a) \end{bmatrix}$$

On examine maintenant si le système est compatible :

```
> evalm(transpose(B)*solutions);
```

$$[-\sin(5a) + 2 \sin(6a) \cos(a)]$$

```
> map(combine,%);
```

$$[\sin(7a)]$$

Donc si : $b = \sin(7a)$, le système est compatible, et les solutions sont données par le triplet 'solutions', sinon il n'y en a pas.

Il reste à étudier les cas : $a = 0$, ou : $a = \pi$, qui sont immédiats à traiter.

En effet, si b est non nul, il n'y a pas de solutions, et si b est nul, les solutions sont $(0,y,z)$ avec y et z quelconques.

Exercice 5

Maple ne sait pas calculer les puissances formelles de matrices. Nous allons le faire pour les matrices diagonalisables.

Exemple: trouver avec Maple les valeurs propres et vecteurs propres de : $M = \begin{bmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{bmatrix}$.

Construire ensuite une matrice permettant de diagonaliser M , et vérifier ensuite que : $P^{(-1)} M P$ est diagonale.

```
> restart;
```

```
M:=matrix(3,3,[11,-5,5,-5,3,-3,5,-3,3]);
```

```
with(linalg):
```

```
eigenvectors(M);
```

$$M := \begin{bmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Warning, new definition for norm

Warning, new definition for trace

$$[16, 1, \{[2, -1, 1]\}], [0, 1, \{[0, 1, 1]\}], [1, 1, \{[-1, -1, 1]\}]$$

```
> P:=transpose(matrix(3,3,[0,1,1],[-1,-1,1],[2,-1,1]]));
```

$$P := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> InvP:=evalm(P^(-1));
```

$$InvP := \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

```
> evalm(InvP&*M&*P);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

On va construire une procédure qui va, pour M donnée, déterminer si elle est diagonalisable, puis les puissances de cette matrice.

- Pour la matrice M précédente construire deux listes, l'une contenant ses valeurs propres et l'autre leurs multiplicités.

```
> valp:=NULL:
ord:=NULL:
S:=[eigenvectors(M)];
for i from 1 to nops(S)
do valp:=valp,S[i][1];
ord:=ord,S[i][2];
od:
valp:=[valp];
ord:=[ord];

S := [[1, 1, {-1, -1, 1}], [16, 1, {2, -1, 1}], [0, 1, {0, 1, 1}]]
valp := [1, 16, 0]
ord := [1, 1, 1]
```

- Extraire ensuite sous forme de liste d'ensembles de vecteurs, les vecteurs propres, toujours dans le bon ordre.

```
> vectp:=NULL:
for i from 1 to nops(S)
do vectp:=vectp,S[i][3];
od:
vectp:=[vectp];

vectp := [{-1, -1, 1}], {2, -1, 1}, {0, 1, 1}]
```

- Transformer ensuite cette liste d'ensembles en une liste simple de vecteurs et tester si la matrice est diagonalisable.

```
> vectp:=map(op,vectp);

vectp := [-1, -1, 1], [2, -1, 1], [0, 1, 1]]
> if(nops(vectp)=add(ord[i],i=1..nops(ord)))
then print(`La matrice est diagonalisable`)
else print(`La matrice n'est pas diagonalisable`)
fi;
```

La matrice est diagonalisable

- Construire alors la matrice de passage, la matrice diagonale associée à M, la matrice diagonale à

la puissance n et enfin M^n .

> **P:=transpose(matrix(vectp));**

$$P := \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

> **DiagM:=diag(seq((valp[i])\$ord[i],i=1..nops(valp)));**

$$DiagM := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> **DiagMn:=diag(seq(((valp[i])^n)\$ord[i],i=1..nops(valp)));**

$$DiagMn := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> **InvP:=evalm(1/P);**

$$InvP := \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

> **Mn:=evalm(P&*DiagMn&*InvP);**

$$Mn := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} 16^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} 16^n & -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} 16^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} 16^n & \frac{1}{3} + \frac{1}{6} 16^n & -\frac{1}{3} - \frac{1}{6} 16^n \\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} 16^n & -\frac{1}{3} - \frac{1}{6} 16^n & \frac{1}{3} + \frac{1}{6} 16^n \end{bmatrix}$$

— Ecrire enfin une procédure avec M et n en paramètres qui reprend toutes ces étapes et la tester sur M, puis sur :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \text{ sur } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ et sur } C = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}.$$

> **puiss:=proc(M,n) local
S,vectp,i,valp,ord,P,InvP,D,DiagMn,Mn;
if type(n,numeric) then RETURN(evalm(M^n)) fi;**

```

S:=[eigenvectors(M)];
vectp:=NULL;
valp:=NULL;
ord:=NULL;
for i from 1 to nops(S)
  do vectp:=vectp,S[i][3];
    valp:=valp,S[i][1];
    ord:=ord,S[i][2];
  od;
vectp:=[vectp];
valp:=[valp];
ord:=[ord];
if(nops(vectp)=add(ord[i],i=1..nops(ord)))
  then print(`La matrice est diagonalisable`)
  else RETURN(`La matrice n'est pas diagonalisable`);
fi;
P:=transpose(matrix(map(Set->op(Set),vectp)));
DiagMn:=diag(seq(((valp[i])^n)$ord[i],i=1..nops(valp)));
InvP:=evalm(P^(-1));
Mn:=map(simplify,evalm(P&*DiagMn&*InvP));
end:

```

> `puiss(M,n);`

La matrice est diagonalisable

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} 16^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} 16^n & -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} 16^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} 16^n & \frac{1}{3} + \frac{1}{6} 16^n & -\frac{1}{3} - \frac{1}{6} 16^n \\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} 16^n & -\frac{1}{3} - \frac{1}{6} 16^n & \frac{1}{3} + \frac{1}{6} 16^n \end{bmatrix}$$

> `A:=matrix(3,3,[a,b,c,0,b,c,0,0,c]);`

$$A := \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

> `puiss(A,3);`

$$\begin{bmatrix} a^3 & a^2 b + (a b + b^2) b & a^2 c + (a b + b^2) c + (a c + b c + c^2) c \\ 0 & b^3 & b^2 c + (b c + c^2) c \\ 0 & 0 & c^3 \end{bmatrix}$$

> `B:=matrix(3,3,[1,2,3,0,1,3,0,0,2]);`

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

> `puiss(B,5);`

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 249 \\ 0 & 1 & 93 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}$$

> `puiss(B,n);`

La matrice n'est pas diagonalisable

> `C:=matrix(3,3,[2/3,1/3,0,3/7,4/7,0,2/9,3/9,4/9]);`

$$C := \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

> `puiss(C,n);`

La matrice est diagonalisable

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{16} + \frac{7}{16} 5^n 21^{(-n)} & \frac{7}{16} - \frac{7}{16} 5^n 21^{(-n)} & 0 \\ \frac{9}{16} - \frac{9}{16} 5^n 21^{(-n)} & \frac{7}{16} + \frac{9}{16} 5^n 21^{(-n)} & 0 \\ -4^n 9^{(-n)} + \frac{9}{16} + \frac{7}{16} 5^n 21^{(-n)} & \frac{7}{16} - \frac{7}{16} 5^n 21^{(-n)} & 4^n 9^{(-n)} \end{bmatrix}$$