# Développements limités.

## Remarques générales :

**Développements limités ou développements asymptotiques (généralisés) :**

- un développement limité (classique ou généralisé) **n'est pas une approximation** de fonction (ou de suite) en une valeur de la variable dans ou au bord du domaine de définition de cette fonction.
- un développement limité (ou asymptotique) **précise le comportement** d'une fonction (ou d'une suite) au voisinage d'une telle valeur.
- un développement limité classique se compose de deux parties :
  - une partie régulière (en général polynomiale)
  - un reste, négligeable devant le dernier terme de la partie polynomiale.
- il faut toujours préciser la valeur où il est effectué et son ordre, la variable étant en général tacite (mais elle peut être précisée en cas de doute).
  Ces différentes informations se lisent dans le reste.
- lorsqu'un développement généralisé (ou asymptotique) est réalisé au voisinage de l'infini, on utilise souvent une variable intermédiaire (par exemple : $h=\frac{1}{x}$, ou : $h=\frac{1}{n}$), ce qui ramène les calculs au voisinage de 0.
- une des principales utilisations des développement limités (ou asymptotiques) réside dans l'obtention de limites ou d'équivalents.

**Exemples :**

- $\exp(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o_0(x^3)$, développement de l'exponentielle en 0 à l'ordre 3 (variable $x$).
- $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o_0(x^5)$, développement du cosinus en 0 à l'ordre 5 (variable $x$).
- $\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$, développement de : $x\mapsto\frac{1}{x+1}$, en $+\infty$ à l'ordre 2 (variable $x$).

## Manipulation des 'o' :

**Généralités :**

- c'est une notation symbolique désignant une fonction (ou une suite) négligeable devant une autre.
- cet objet sous entend une considération locale et une limite.
- il est possible de raisonner directement avec cette notation.
  En cas de doute ou de problème, il est pratique de revenir à une écriture utilisant des fonctions 'de type $\varepsilon$', c'est-à-dire tendant vers 0.

**Exemples :**

- $o_0(x^3)$, signifie une fonction négligeable devant la fonction : $x\mapsto x^3$, (de la variable réelle $x$) en 0

et peut encore s'écrire : $o_0(x^3) = x^3.\varepsilon(x)$, avec : $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

- $o_{+\infty}(\ln(x))$, peut encore s'écrire : $o_{+\infty}(\ln(x)) = \ln(x).\varepsilon(x)$, avec : $\lim_{x\to+\infty}\varepsilon(x) = 0$.
- $o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, peut encore s'écrire : $o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2}.\varepsilon(n)$, avec : $\lim_{n\to+\infty}\varepsilon(n) = 0$.

**Exemples de raisonnement avec les 'o' :**

- $o_0(x^2) + o_0(x^3) = o_0(x^2)$,
  car : $o_0(x^2) + o_0(x^3) = x^2.\varepsilon_1(x) + x^3.\varepsilon_2(x) = x^2.(\varepsilon_1(x) + x.\varepsilon_2(x)) = x^2.\varepsilon(x)$,
  où la dernière fonction ε tend bien vers 0 quand $x$ tend vers 0.
- $o_{+\infty}(x^4) - o_{+\infty}(x^4) = o_{+\infty}(x^4)$,
  car : $o_{+\infty}(x^4) - o_{+\infty}(x^4) = x^4.\varepsilon_1(x) - x^4.\varepsilon_2(x) = x^4.(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) = x^4.\varepsilon(x) = o_{+\infty}(x^4)$.
- $o_{+\infty}(n) + o_{+\infty}(n.\ln(n)) = o_{+\infty}(n.\ln(n))$,
  car : $o_{+\infty}(n) + o_{+\infty}(n.\ln(n)) = n.\ln(n).\left[\frac{\varepsilon_1(n)}{\ln(n)} + \varepsilon_2(n)\right] = n.\ln(n).\varepsilon(n)$, toujours avec : $\lim_{n\to+\infty}\varepsilon(n) = 0$.

## Théorème d'existence et calcul pratique des développements limités :

**Existence :**

- l'existence d'un développement limité s'obtient en général par le théorème de Taylor-Lagrange (ou Taylor-Young) ou à l'aide de calculs directs (et justifiés).
- les théorèmes cités au-dessus donnent aussi la valeur de ces développements limités, mais c'est une méthode en général lourde que l'on n'envisage que si d'autres techniques de calcul sont inefficaces.

**Exemples :**

- exp est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc admet des développements limités en tout point de $\mathbb{R}$ et à tout ordre.
  Attention, $+\infty$ n'est pas un réel et donc on ne sait rien a priori sur l'existence de développement limité de l'exponentielle en $+\infty$ : d'ailleurs il n'en existe pas de polynomial.
- $\sin(x+x^2) = (x+x^2) - \frac{(x+x^2)^3}{6} + o_0((x+x^2)^3) = x + x^2 - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)$,
  résultat confirmé par la réécriture du 'o' à l'aide de fonctions 'de type $\varepsilon$'.

**Calculs pratiques :**

- on peut effectuer des sommes, différences, produits, (et même, mais rarement : en général, on l'évite) des quotients de développements limités.
- lorsque l'on effectue des compositions de développements limités, on utilise des variables intermédiaires et il est impératif de surveiller où les développements intermédiaires sont effectués.
- lorsque le développement ne s'effectue pas en 0, il est courant d'utiliser des variables intermédiaires qui, elles, sont au voisinage de 0.

## Exemples détaillés :

- $\cos(x+x^2)$ en 0 à l'ordre 4.

On pose la variable intermédiaire : $u = x + x^2$, et quand $x$ tend vers 0, $u$ tend aussi vers 0.
On effectue le développement limité de $\cos(u)$ en 0 à l'ordre 4 (en la variable $u$).

$$\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + o_0(u^4).$$

On remplace de façon méthodique :

$$u^2 = (x+x^2)^2 = 0 + 0.x + x^2 + 2.x^3 + x^4,$$

$$u^4 = (x+x^2)^4 = 0 + 0.x + 0.x^2 + 0.x^3 + x^4 + o_0(x^4),$$

$$o_0(u^4) = (x+x^2)^4.\varepsilon(u) = x^4.[(1+x)^4.\varepsilon(x)] = x^4.\varepsilon_1(x) = o_0(x^4),$$

le dernier point pouvant être abrégé si on maîtrise ces notions.
Et on effectue une combinaison linéaire de ces trois égalités pour obtenir :

$$\cos(x+x^2) = 1 - \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{11}{24}.x^4 + o_0(x^4).$$

- $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ en $+\infty$ à l'ordre 1, avec : $a \in \mathbb{R}^+$*.

On transforme l'expression à l'aide de la fonction exp.

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \exp\left(n.\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\right) = \exp\left(n.\left(\frac{a}{n} - \frac{a^2}{2.n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = \exp\left(a - \frac{a^2}{2.n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

soit encore : $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a.\exp\left(-\frac{a^2}{2.n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

On pose : $h = -\frac{a^2}{2.n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$, qui tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$.

On développe l'exponentielle comme dans l'exemple précédent, et on obtient :

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a.\left(1 - \frac{a^2}{2.n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = e^a - \frac{a^2.e^a}{2.n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right).$$

***Remarque :*** cela donne en particulier la limite en $+\infty$ de l'expression précédente qui est donc $e^a$.