Entraînement pour les CPGE

Les enseignants du lycée Dupuy de Lôme

Été 2012

1 Classe de seconde

A. Calculs numériques

Exercice 1. [solution]

Effectuer les opérations suivantes et donner le résultat sous forme de fraction irréductible :

$$\begin{aligned}
A &= \frac{2}{3}+\frac{3}{2}\\
B &= \frac{1}{3}-1+\frac{1}{4}\\
C &= 3-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\\
D &= 2\times\frac{3}{7}\times\frac{14}{9}\\
E &= 4\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)\\
F &= 27\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)\\
G &= \frac{1+\frac{2}{5}}{3-\frac{1}{5}}\\
H &= \frac{2-3\frac{5}{7}}{\frac{20}{21}}\\
I &= 3+5\frac{\frac{7}{2}-2}{\frac{7}{4}-\frac{1}{2}}\\
J &= \frac{-\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}{\left(\frac{1}{4}-3\right)\left(2+\frac{1}{5}\right)}
\end{aligned}$$

Exercice 2. [solution]

Déterminer les ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
A &=]2.4;3[\cap[2;2.9]\\
B &= [-3.1;0]\cap[-1.9;+\infty[\\
C &=]-\infty;3]\cap]-6;+\infty[\\
D &=]-4;+\infty[\cap[10;+\infty[\\
E &= [-2;0[\cap[0;+\infty[\\
F &=]2.4;3[\cup[2;2.9]\\
G &= [-3.1;0]\cup[-1.9;+\infty[\\
H &=]-\infty;3]\cup]-6;+\infty[\\
I &=]-4;+\infty[\cup[10;+\infty[\\
J &= [-2;0[\cup[0;+\infty[
\end{aligned}$$

Exercice 3. [solution]

Par définition, un nombre premier est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et n'ayant que deux diviseurs : 1 et lui-même. Par exemple, par lecture inverse des tables de multiplication, on peut écrire : $56=7\times8=2^3\times7$ et $750=3\times25\times10=2\times3\times5^3$.

1. écrire les nombres suivants sous forme d'un produit de puissances de nombres premiers :

$$\begin{aligned}
A &= 2700\\
B &= 63\times28\\
C &= 18^2\times56\\
D &= 4900\times12^3
\end{aligned}$$

2. écrire les nombres suivants sous la forme d'un quotient de puissances de nombres premiers :

$$\begin{aligned}
A &= \frac{12}{49}\times\frac{25}{48}\times21\\
B &= \frac{12^3}{5^2}\times\frac{35}{48}\times\frac{24^2}{1000}\\
C &= \frac{(12\times14)^2\times25}{39\,(105\times28)^2}
\end{aligned}$$

Exercice 4. [solution]

Simplifier et donner le résultat sous la forme d'un produit ou d'un quotient de puissances à exposants positifs :

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\left(a^2b\right)^3c^2}{a\,b^{-3}}\\
B &= \frac{(-a)^5\,b\,c^{-2}}{b^3\,(-c)^{-3}\,a^2}\\
C &= \frac{\left(a^2b\right)^{-3}c^5\,a^4}{b^3\,(-c)^{-3}\,a^2}\\
D &= \frac{\left(-ab^2\right)^2\left(ab^{-1}\right)^3\left(-a^2b\right)}{-a^2c^{-5}\left(-a^{-1}bc^2\right)^3}\\
E &= \frac{\left(a^{-2}b\right)^4\left(-a^2b\right)^{-1}}{\left(-ab^{-1}\right)^{-3}}
\end{aligned}$$

Exercice 5. [solution]

Développer et simplifier :

$$\begin{aligned}
A &= \left(\sqrt{5}-2\right)^2\\
B &= \left(\frac{1}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\\
C &= 3\sqrt{25-9}\times\frac{3\sqrt{5}+\sqrt{20}}{\sqrt{45}\left(2-\frac{5}{6}+\frac{4}{3}\right)}
\end{aligned}$$

B. Calcul littéral

Exercice 6. [solution]

Développer, réduire et ordonner :

$$\begin{aligned}
A(x) &= 2x-3(4x+3)+5x-3(x-4)\\
B(x) &= x(x+4)65x+4(x-1)-\left(x^2-1\right)\\
C(x) &= 2x-(3(4x+3)+5)x-(3x-4)\\
D(x) &= 2\left(\frac{x}{2}+1\right)^2-3\left(\frac{x}{3}-1\right)^2\\
E(x) &= \left(x\sqrt{3}-1\right)^2-3x\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}-x\right)\left(x\sqrt{3}-1\right)
\end{aligned}$$

Exercice 7. [solution]

Factoriser les expressions suivantes sous la forme d'un produit de facteurs de premier degré :

$$\begin{aligned} A &= \left(4x^2-1\right)(2x-3) \\ B &= (2x-1)^2-(5x+4)^2 \\ C &= 1-(3x+7)^2 \\ D &= \left(\frac{x-3}{2}\right)^2-\frac{x^2}{4} \end{aligned}$$

Exercice 8. [solution]

écrire les expressions suivantes sous la forme d'un quotient après avoir précisé les valeurs interdites :

$$\begin{aligned} A &= \frac{4x-1}{2x+1}-\frac{2x}{x-3} \\ B &= 3-\frac{x+4}{x+1}+x \\ C &= \frac{5}{x}-\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x-2} \end{aligned}$$

Exercice 9. [solution]

Simplifier une expression rationnelle, c'est diviser numérateur et dénominateur par le même facteur. Exemple :

$$\frac{(2x-3)(x+1)}{x(2x+2)}=\frac{(2x-3)(x+1)}{2x(x+1)}=\frac{2x-3}{2x}$$

Attention : Ne pas oublier de préciser les valeurs interdites. Ici 0 et -1 sont interdites. Simplifier les expressions rationnelles suivantes si possible en précisant les valeurs interdites.

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^2-4x}{(x-1)^2-1} \\ B &= \frac{x^2-4x+4}{x^2-4} \\ C &= \frac{2x-3(x+1)}{(x+3)(x+1)} \\ D &= \frac{(x+3)^2-(3x-5)^2}{(x+3)(2x-1)} \end{aligned}$$

Exercice 10. [solution]

Résoudre les équations suivantes, on précisera l'ensemble des solutions :

$$\begin{aligned} -5x(x+3) &= 0 && (1)\\ 4x^2 &= 2x && (2)\\ x^2-\frac{1}{9} &= 0 && (3)\\ 2(x+4)-5(x-2) &= 0 && (4)\\ x(x-4) &= 2 && (5)\\ \frac{3x}{4}-\frac{5}{2} &= 0 && (6)\\ -\frac{2}{25}+\frac{4x}{5} &= 0 && (7)\\ \frac{12x-1}{4}-\frac{1+4x}{2} &= \frac{x-4}{2}-\frac{3}{4} && (8)\\ 3\left(x+\sqrt{3}\right)-2 &= 2x\left(1+\sqrt{3}\right) && (9) \end{aligned}$$

Exercice 11. [solution]

Résoudre les équations proposées à l'aide d'une factorisation s'il y a lieu :

$$\begin{aligned} (-5x+4)^2 &= 0 && (10)\\ -4(3x-1)^2+(2x+3)^2 &= 0 && (11)\\ (5x+3)^2 &= 4(2x-3)^2 && (12) \end{aligned}$$

Exercice 12. [solution]

Résoudre les équations comportant des expressions rationnelles :

$$\begin{aligned} \frac{(x-3)^2-25}{x-8} &= 0 && (13)\\ \frac{3}{x+1} &= 4 && (14)\\ 1-\frac{x+2}{2x-3} &= 0 && (15)\\ \frac{5}{x} &= \frac{-3}{x+1}+\frac{3}{x(x+1)} && (16)\\ \frac{2}{x+3}+\frac{1}{x} &= \frac{3}{x(x+3)} && (17) \end{aligned}$$

C. Fonctions

Exercice 13. [solution]

On considère la fonction f définie sur les réels par : $f(x)=(x-1)^2-4$.

1. Calculer les images de $\frac{2}{5}$, $-\frac{1}{4}$ et $\sqrt{3}+1$ par la fonction f.
2. Déterminer les antécédents de 0 par f.
3. Déterminer les antécédentes de -1 par f.

Exercice 14. [solution]

Parmi les fonctions suivantes, reconnaitre les fonctions affines. On indiquera le coefficient dans ce cas et l'ordonnée à l'origine.

$$\begin{aligned} x &\longmapsto \frac{3}{2}(x+1) && (18)\\ x &\longmapsto x-\frac{15}{100}x && (19)\\ x &\longmapsto 3-\frac{1}{x} && (20)\\ x &\longmapsto 2(x-3)-\frac{1}{2}x && (21)\\ x &\longmapsto x(1-3x)+2 && (22) \end{aligned}$$

Exercice 15. [solution]

Déterminer la fonction affine f dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ passe par les points $A\left(\frac{3}{2};\frac{-1}{8}\right)$ et $B\left(\frac{1}{3};\frac{3}{4}\right)$.

Exercice 16. [solution]

Effectuer les calculs suivants comportant des valeurs absolues :

$$\begin{array}{rcl} A & = & |5-3|+|4-7| \\ B & = & |-3-10|-|7-10| \\ C & = & |1-\sqrt{3}|-|5-\sqrt{12}|-3|\sqrt{27}-4\sqrt{3}| \end{array}$$

Exercice 17. [solution]

Simplifier : $S=\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$.

Exercice 18. [solution]

Résoudre dans $\mathbf{R}$:

$$|x-3| = 3-x \tag{23}$$
$$|2x-3| \geq 2x-3 \tag{24}$$
$$|x-\frac{5}{3}| > \frac{2}{3} \tag{25}$$
$$|3x+5| \leq \frac{4}{3} \tag{26}$$
$$|\frac{x+7}{4}| > \frac{2}{3} \tag{27}$$
$$|2x-4| = |x+1| \tag{28}$$
$$|x| = 2x-3 \tag{29}$$

Exercice 19. [solution]

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x)=\frac{x-8}{4}+\left|1-\frac{x}{2}\right|$$

1. étudier le signe de $2-x$ et en déduire une expression de $f(x)$ sans valeur absolue, suivant la valeur de x.
2. Tracer la courbe représentative de f.
3. Résoudre algébriquement (en s'appuyant sur le graphique) :

$$f(x) = 3 \tag{30}$$
$$f(x) = -x \tag{31}$$

4. Déterminer la fonction affine g prenant les mêmes valeurs que f en -1 et en 7. Résoudre graphiquement $f(x)\leq g(x)$.

Exercice 20. [solution]

Résoudre les inéquations suivantes :

$$\frac{1}{4} \leq x^2\leq 9 \tag{32}$$
$$0 \leq x^2<5 \tag{33}$$
$$3x^3 \geq \frac{1}{3} \tag{34}$$
$$4(x-1)^2 \geq 9 \tag{35}$$
$$16 \leq (2x-1)^2<25 \tag{36}$$
$$2\left(\frac{x+3}{4}\right)^2 \leq 8 \tag{37}$$
$$(2x+1)^2+\frac{4}{25} > 0 \tag{38}$$
$$-1 < (5x-4)^2+1<10 \tag{39}$$

Exercice 21. [solution]

Déterminer un encadrement de $f(x)$ dans chacun des cas suivants :

1. $f(x)=x^2+3$ avec $x\in[0;2]$.
2. $f(x)=(x-3)^2$ avec $x\in[0;4]$.
3. $f(x)=\dfrac{3-x^2}{4}$ avec $x\in\left[-3;\dfrac{1}{4}\right]$.

Exercice 22. [solution]

Résoudre les équations suivantes :

$$2\sqrt{x}-1 = 0 \tag{40}$$
$$\sqrt{x}-\sqrt{3} = 0 \tag{41}$$
$$\sqrt{x+4} = 2 \tag{42}$$
$$\sqrt{2x-3} = 1 \tag{43}$$

Exercice 23. [solution]

Résoudre les inéquations suivantes :

$$x^3-1 \leq 0 \tag{44}$$
$$8x^3+27 \geq 0 \tag{45}$$
$$(x-2)^3 < 1 \tag{46}$$
$$-1\leq(x+1)^3 \leq 8 \tag{47}$$

Exercice 24. [solution]

Par un raisonnement à support graphique, résoudre les inéquations suivantes :

$$\frac{1}{x} < 2 \tag{48}$$
$$\frac{1}{x} > 0 \tag{49}$$
$$\frac{1}{x} \leq -100 \tag{50}$$
$$\frac{4}{x}-\frac{1}{3} \geq 0 \tag{51}$$
$$\frac{1}{x} \geq -\frac{1}{2} \tag{52}$$

Exercice 25. [solution]

Pour résoudre l'inéquation $\dfrac{1}{x-3}\leq\dfrac{1}{4}$, on considère le signe de $x-3$. Si $x>3$ alors $x-3>0$. Or la fonction $x\longmapsto\dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$ donc l'inéquation équivaut à $x-3\geq 4$, c'est-à-dire à $x\geq 7$. Si $x<3$ alors $x-3<0$ et l'inéquation est vérifiée. Donc l'ensemble des solutions est $S=]-\infty;3[\cup[7;+\infty[$.
Résoudre de même les inéquations suivantes :

$$\frac{3}{x-4} \leq \frac{3}{2} \tag{53}$$
$$\frac{1}{5-x}+1 \geq 0 \tag{54}$$
$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{4} < 0 \tag{55}$$

Exercice 26. [solution]

étudier le signe des expressions suivantes, faire un tableau de signe pour résumer :

$$\begin{aligned}
A(x) &= 3x-4\\
B(x) &= \frac{2x}{3}(1-x)\\
C(x) &= \left(4x^2-1\right)(x+2)\\
D(x) &= (4x-5)(3x-7)\\
E(x) &= |2x|-1\\
F(x) &= 4-\frac{1}{x^2}\\
G(x) &= \frac{2x(-x+3)}{4+x^2}\\
H(x) &= \frac{1-x}{x^2-2x}\\
I(x) &= \frac{(1-x)^2}{9}-\frac{1}{4}\\
J(x) &= \frac{2+x}{x+1}-1\\
K(x) &= \frac{4x}{x+2}-\frac{4}{x+1}\\
L(x) &= \frac{x}{3}+\frac{4}{3x}
\end{aligned}$$

Exercice 27. [solution]

Résoudre les inéquations (en s'aidant, s'il y a lieu, d'un tableau de signe) :

$$\frac{x-3}{3}-\frac{7x-6}{6} > 0 \quad (56)$$

$$\frac{3-x}{x+5} \leq 1 \quad (57)$$

$$5x \leq -\frac{5x+3}{x-1} \quad (58)$$

$$\frac{4x^2+4x+2}{5-2x} > 0 \quad (59)$$

D. Géométrie

Exercice 28. [solution]

Simplifier au maximum l'écriture des vecteurs suivants en utilisant la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}\\
\vec{v} &= \overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}\\
\vec{w} &= \overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

Exercice 29. [solution]

Soient ABC un triangle et I le milieu de $[AC]$. On considère les points D et E tels que $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}$ et $2\overrightarrow{EA}=3\overrightarrow{BC}$. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exercice 30. [solution]

Dans un repère du plan, on considère les points $A(3,1)$, $B(2,3)$, $C(-9,0)$ et $D(-1,-1)$. Calculer les coordonnées des points E et F tels que $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AD}$. Montrer que les points C, E et F sont alignés.

Exercice 31. [solution]

À l'aide d'un cercle trigonométrique, déterminer les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
A &= \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\\
B &= \sin\left(\frac{8\pi}{3}\right)\\
C &= \cos\left(\frac{-7\pi}{3}\right)\\
D &= \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\\
E &= \sin\left(\frac{23\pi}{4}\right)\\
F &= \cos\left(\frac{4136\pi}{3}\right)\\
G &= \sin(106\pi)\\
H &= \cos\left(-\frac{1623\pi}{4}\right)\\
I &= \sin\left(\frac{75\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 32. [solution]

Exprimer à l'aide de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ les nombres suivants :

$$\begin{aligned}
A &= \cos(x+9\pi)\\
B &= \sin(3\pi+x)\\
C &= \cos(-x-100\pi)\\
D &= \cos\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)\\
E &= \sin\left(\frac{-7\pi}{2}-x\right)\\
F &= \cos\left(\frac{9\pi}{6}+x\right)\\
G &= \sin(\pi+x)+\cos(\pi-x)\\
H &= \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-3\cos\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)-4\sin(\pi-x)
\end{aligned}$$

Exercice 33. [solution]

Déterminer $\sin(a)$ sachant que $\cos(a)=-\frac{1}{3}$ et $a\in[0;\pi]$.

Exercice 34. [solution]

On sait que $\sin(\alpha)=-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ et $-\dfrac{\pi}{2}\leq\alpha\leq 0$. Déterminer la valeur exacte de $\cos(\alpha)$.

Exercice 35. [solution]

Résoudre dans $]-\pi;\pi]$, à l'aide d'un cercle trigonométrique :

$$\sin(x) = \frac{1}{2} \quad (60)$$

$$\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (61)$$

$$\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (62)$$

$$\sin(x) = 0 \quad (63)$$

2 Classe de première S

A. Fonctions

Exercice 36. [solution]

Calculer si possible $v \circ u(2)$ et $u \circ v(1)$ avec :

1. $u(x) = x^2$ et $v(x) = 3 - x$ pour tout x réel.
2. $u(x) = \dfrac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $v(x) = x^2 - 1$ pour tout x réel.

Exercice 37. [solution]

Écrire $v \circ u(x)$ et $u \circ v(x)$ en précisant les ensembles de définition de $v \circ u$ et $u \circ v$:

1. $u(x) = x^2$ et $v(x) = 3 - x$ pour tout x réel.
2. $u(x) = \dfrac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $v(x) = x^2 - 1$ pour tout x réel.
3. $u(x) = \sqrt{x}$ pour $x \geq 0$ et $v(x) = 2x + 6$ pour tout réel x.
4. $u(x) = \dfrac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $v(x) = \sqrt{x}$ pour tout $x \geq 0$.

Exercice 38. [solution]

Exprimer chacune des fonctions suivantes comme la composée d'une fonction affine et des fonctions carrée, inverse ou racine carrée. Préciser tous les ensembles de définition.

1. $f : x \longmapsto \sqrt{2x - 4}$.
2. $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x + 5}$.
3. $h : x \longmapsto \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{2}$.
4. $i : x \longmapsto -2\sqrt{x} + 7$.
5. $j : x \longmapsto (x - 3)^2$.
6. $k : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x + 1}}$.

Exercice 39. [solution]

Sans écrire aucun calcul, donner, pour chacun des polynômes suivants, son degré, son terme de plus haut degré et son terme constant :

$$\begin{aligned} A &= (x+2)(x+4) \\ B &= (2x+5)(x-3)+2 \\ C &= \left(\sqrt{3}x+1\right)^2 \\ D &= 2x\left(x^2+3\right)+x^2-5 \\ E &= x(x+4)(x-1)^2 \end{aligned}$$

Exercice 40. [solution]

Mettre sous forme canonique chacun des trinômes suivants :

$$\begin{aligned} A &= 2x^2+8x-2 \\ B &= y^2+3y+1 \\ C &= -t^2+2t+5 \\ D &= 9a^2+18a+1 \end{aligned}$$

Exercice 41. [solution]

Déterminer les racines des trinômes suivants :

$$\begin{aligned} A(x) &= 2x^2+3x-2 \\ B(x) &= 8x^2-2x-1 \\ C(t) &= \frac{1}{3}t^2+t-6 \\ D(a) &= 3a^2+4a-1 \end{aligned}$$

Exercice 42. [solution]

Résoudre les équations suivantes :

$$\frac{x}{x+1} - \frac{x}{x-1} + \frac{2}{x^2-1} = 0 \qquad (64)$$

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+1} = \frac{x+5}{x+3} \qquad (65)$$

Exercice 43. [solution]

Factoriser si possible les trinômes suivants en produit de deux polynômes de degré 1 à coefficient réel :

$$\begin{aligned} A(x) &= 3x^2-6x-9 \\ B(t) &= -t^2-12t+28 \\ C(a) &= 16a^2+24a+9 \end{aligned}$$

Exercice 44. [solution]

Calculer $f'(x)$ en précisant si possible l'ensemble de dérivation.

1. Sommes :

$$f_1 : x \longmapsto x^6 + \sin(x) \qquad (66)$$

$$f_2 : x \longmapsto x^2 + \sqrt{x} + 4 \qquad (67)$$

$$f_3 : x \longmapsto 3x^3 - \cos(x) \qquad (68)$$

$$(69)$$

2. Produits :

$$f_4 : x \longmapsto x\sqrt{x} \qquad (70)$$

$$f_5 : x \longmapsto \frac{1}{x}\left(3+\sqrt{x}\right) \qquad (71)$$

$$f_6 : x \longmapsto x^3\left(x - \frac{1}{x}\right) \qquad (72)$$

$$(73)$$

3. Inverses :

$$f_7 : x \longmapsto \frac{1}{x-3} \qquad (74)$$

$$f_8 : x \longmapsto \frac{-5}{\sqrt{x}+1} \qquad (75)$$

$$f_9 : x \longmapsto \frac{3}{x^3-2x} \qquad (76)$$

4. Quotients :

$$f_{10} : x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x+2\cos(x)} \qquad (77)$$

$$f_{11} : x \longmapsto \frac{2\sqrt{x}+3}{x^2+1} \qquad (78)$$

5. Composées :

$$f_{12} : x \longmapsto \sqrt{2x+6} \quad (79)$$
$$f_{13} : x \longmapsto (3x-1)^{18} \quad (80)$$
$$f_{14} : x \longmapsto \sin(2x) \quad (81)$$
$$f_{15} : x \longmapsto \cos\left(3x^2\right) \quad (82)$$
$$f_{16} : x \longmapsto (\sin(x))^3 \quad (83)$$
$$f_{17} : x \longmapsto \frac{\sqrt{5x+1}}{4-3x} \quad (84)$$

Exercice 45. [solution]

Déterminer le tableau des variations de f après avoir précisé le domaine de définition et calculé $f'(x)$:

$$f(x) = 4x^3-3x^2+1 \quad (85)$$
$$f(x) = x^3-x^2+\frac{1}{3}x-1 \quad (86)$$
$$f(x) = \frac{x-3}{x-1} \quad (87)$$
$$f(x) = \frac{x^2-x+3}{x^2-4x+3} \quad (88)$$
$$f(x) = 2x+3+\frac{1}{2x-4} \quad (89)$$
$$(90)$$

Exercice 46. [solution]

Déterminer les limites éventuelles de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et $-\infty$:

$$f(x) = 5x^4-3x^2 \quad (91)$$
$$f(x) = 4x^3-100x^2+\frac{1}{x} \quad (92)$$
$$f(x) = x-\sqrt{x} \quad (93)$$
$$f(x) = (2-x)\sqrt{x} \quad (94)$$
$$f(x) = \frac{3x^2-5}{x^2+2} \quad (95)$$
$$f(x) = \frac{1-x}{2+2x} \quad (96)$$
$$f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x}+2} \quad (97)$$

Exercice 47. [solution]

Déterminer les limites demandées :

$$A = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}$$
$$B = \lim_{x\to 2^-} \frac{-3x}{2x-4}$$
$$C = \lim_{x\to 2^+} \frac{2x+1}{3x-6}$$
$$D = \lim_{x\to -3^-} \frac{4x^2-5}{5x+15}$$
$$E = \lim_{x\to \frac{1}{2}^+} \frac{4x}{(2x-1)^2}$$
$$F = \lim_{x\to -1^-} \frac{2x^2+5x+3}{x^2-3x-4}$$

B. Suites

Exercice 48. [solution]

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n = \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$$

Calculer les sept premiers termes de la suite.

Exercice 49. [solution]

Exprimer u_{n+1}, u_{2n} et u_{2n+1} en fonction de n sachant que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2n^2-3 \quad (98)$$
$$u_n = (-1)^n \quad (99)$$
$$u_n = 2^{2n-1} \quad (100)$$
$$u_n = \frac{n-1}{n-3} \quad (101)$$

Exercice 50. [solution]

Donner les valeurs de u_1, u_2, u_3 pour chacune des suites suivantes :

$$\begin{cases} u_0 & = 2 \\ u_{n+1} & = 4u_n-2 \qquad (n \geq 0) \end{cases} \quad (102)$$

$$\begin{cases} u_0 & = 3 \\ u_n & = 2^n-u_{n-1} \qquad (n \geq 1) \end{cases} \quad (103)$$

Exercice 51. [solution]

La suite $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison 2. Calculer u_1, u_2, u_3.

Exercice 52. [solution]

Les suites suivantes sont-elles des suites arithmétiques ? Si oui, donner sa raison et son premier terme, sinon justifier.

$$u_n = n+2 \quad (104)$$
$$v_n = n^2-1 \quad (105)$$
$$w_n = -5n-3 \quad (106)$$
$$x_n = \frac{n+2}{n} \quad (107)$$

Exercice 53. [solution]

Soit $(u_n)_n$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 10$ et de raison 2. Calculer u_{100}.

Exercice 54. [solution]

La suite $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q = -2$ et de premier terme $v_0 = 3$. Déterminer v_n en fonction de n.

Exercice 55. [solution]

La suite $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_5 = 2$. Déterminer v_n en fonction de n.

Exercice 56. [solution]

Les suites suivantes sont-elles des suites géométriques? Si oui, donner la raison et son premier terme, sinon justifier.

$$\begin{aligned} u_n &= 3^{n+1} && (108)\\ v_n &= n^2 && (109)\\ w_n &= n^n && (110)\\ x_n &= -5^{n-2} && (111) \end{aligned}$$

Exercice 57. [solution]

Que vaut :

1. La somme des N premiers termes d'une suite arithmétique $(u_n)_{n\geq 0}$?
2. La somme des N premier termes d'une suite géométrique $(u_n)_{n\geq 0}$?

Exercice 58. [solution]

étudier la monotonie des suites :

$$\begin{aligned} u_n &= n^2 && (112)\\ v_n &= 1+\frac{1}{n} && (113)\\ w_n &= \frac{n}{n+1} && (114)\\ x_n &= \frac{2^n}{n} && (115)\\ y_n &= \frac{n^2+1}{2n^2} && (116) \end{aligned}$$

Exercice 59. [solution]

Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de :

$$\begin{aligned} u_n &= 1.2^n && (117)\\ v_n &= -0.4^n && (118)\\ w_n &= 2^{-n} && (119)\\ x_n &= -35^n && (120)\\ y_n &= (1-2n)\left(n^2+3\right) && (121)\\ z_n &= \left(2+\frac{1}{n}\right)^2 && (122)\\ a_n &= \left(2-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(3+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right) && (123)\\ b_n &= 3n^2-4n+2 && (124)\\ c_n &= \frac{n^2-2n+3}{4n^3+5} && (125)\\ d_n &= \frac{5^n+3^n}{4^n} && (126) \end{aligned}$$

C. Trigonométrie

Exercice 60. [solution]

Soit $a=\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$. Exprimer en fonction de a :

$$\begin{aligned} A &= \sin\left(-\frac{\pi}{7}\right) && (127)\\ B &= \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) && (128)\\ C &= \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) && (129)\\ D &= \cos\left(\frac{5\pi}{14}\right) && (130) \end{aligned}$$

Exercice 61. [solution]

Rappeler les formules à connaitre par cœur pour $\cos(a+b)$, $\cos(a-b)$, $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$.

Exercice 62. [solution]

Montrer que pour tous réels x et y :

$$\cos(x+y)\cos(x-y)=\cos^2(x)-\sin^2(y)$$

3 Classe de terminale S

A. Exponentielle et logarithme

Exercice 63. [solution]

Simplifier les expressions algébriques proposées :

$$\begin{aligned} A &= 3e^{5x}\left(-4e^{-4x+2}\right) && (131)\\ B &= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 && (132)\\ C &= e^{-10x+3}\times\left(e^{-x-2}\right)^{-2}\times\left(e^{3x-2}\right)^3 && (133) \end{aligned}$$

Exercice 64. [solution]

Résoudre les équations et les inéquations proposées :

$$\begin{aligned} e^{1-x^2} &\leq 0 && (134)\\ xe^x &\leq 0 && (135)\\ 5e^{2x}-4e^x-1 &= 0 && (136)\\ e^{x^2-x} &\leq e && (137)\\ e^{5x} &= 1 && (138) \end{aligned}$$

Exercice 65. [solution]

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2e^{-2x}+1}{e^{-2x}-1}$

1. Déterminer son ensemble de définition D_f.
2. Montrer que pour tout $x\in D_f$, on a $f(x)=\dfrac{e^{2x}+2}{1-e^{2x}}$.
3. Pour tout $x\in D_f$, évaluer la quantité : $f(x)+f(-x)$. Quelle conséquence graphique en tirez-vous?
4. Montrer que pour tout $x\in D_f$, on a $f(x)=2+\dfrac{3}{e^{-2x}-1}$.
5. Justifier que f est dérivable sur D_f et calculer $f'(x)$ pour tout $x\in D_f$.
6. En déduire les variations de f.

Exercice 66. [solution]

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+(1-x)e^{2x}\right)$.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer les limites de f en ∞ et $-\infty$.

2. Montrer que la droite Δ d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$. Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et calculer sa dérivée.
4. Soit u la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $u(x) = 1 + (1-2x)\,e^{2x}$.
   (a) Étudier le sens de variation de u.
   (b) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[0;1]$.
   (c) Déterminer le signe de u sur $\mathbf{R}$.
5. Étudier le sens de variation de f, puis dresser son tableau des variations.
6. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 67. [solution]

Calculer en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$ les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \ln(48) && (139)\\ B &= \ln\left(\frac{27}{64}\right) && (140)\\ C &= \ln\left(72^3\right) - \ln\left(36^2\right) && (141)\end{aligned}$$

Exercice 68. [solution]

Simplifier les nombres proposés :

$$\begin{aligned} A &= \ln\left(\frac{e^{2,5}\sqrt{e^3}}{e^5}\right) && (142)\\ B &= \frac{e^{-2\ln(\sqrt{e})}}{e^{3\ln(e)-5\ln\left(\sqrt[3]{e^2}\right)}} && (143)\end{aligned}$$

Exercice 69. [solution]

Déterminer les limites des fonctions suivantes en les points considérés :

$$\begin{aligned} &f(x) = \left(x^2+1\right)\ln(2x) && \text{en } 0 && (144)\\ &g(x) = \frac{\ln(3+x)}{1+x^2} && \text{en } \infty && (145)\\ &h(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} && \text{en } 0 && (146)\end{aligned}$$

Exercice 70. [solution]

Après avoir déterminé l'ensemble de définition de l'équation, la résoudre :

$$\begin{aligned} \ln(2x-1) &= \ln(2) && (147)\\ 2\ln(x)^2 - \ln(x) - 1 &= 0 && (148)\\ 2(\ln(x))^2 - 3\ln\left(\frac{1}{x}\right) - 9 &= 0 && (149)\end{aligned}$$

Exercice 71. [solution]

Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction $f : x \longmapsto x + \ln\left(1 + e^{-2x}\right)$ admet deux asymptotes au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$.

Exercice 72. [solution]

Calculer la dérivée des fonctions suivantes *après* avoir indiqué son ensemble de définition *et* son ensemble de dérivation.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln\left(x^2-1\right)}{x} && (150)\\ f(x) &= \ln(\ln(x)) && (151)\\ f(x) &= e^{x\ln\left(1-x^2\right)} && (152)\end{aligned}$$

B. Intégration et équations différentielles

Exercice 73. [solution]

Vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

$$\begin{aligned} &F(x) = 2\sqrt{3x-2} && I = \left]\frac{2}{3};+\infty\right[&& f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-2}} && (153)\\ &F(x) = e^{-x^2+1} && I = \mathbf{R} && f(x) = -2xe^{-x^2+1} && (154)\end{aligned}$$

Exercice 74. [solution]

Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur l'intervalle

I :

$$f(x)=x^4-\frac{2}{3}x^3+3x^2-\frac{4}{5}x+1 \qquad I=\mathbf{R} \qquad (155)$$
$$f(x)=-3\cos(x)+2\sin(x)+1 \qquad I=\mathbf{R} \qquad (156)$$
$$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right) \qquad I=\mathbf{R} \qquad (157)$$
$$f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^3} \qquad I=]0;+\infty[\qquad (158)$$
$$f(x)=x^2+5x-\frac{2}{x^2} \qquad I=]-\infty;0[\qquad (159)$$
$$f(x)=e^x\left(e^x-1\right)^3 \qquad I=\mathbf{R} \qquad (160)$$
$$f(x)=5\cos(x)\sin^2(x) \qquad I=\mathbf{R} \qquad (161)$$
$$f(x)=2(2x+3)^4 \qquad I=\mathbf{R} \qquad (162)$$
$$f(x)=\frac{4x+2}{\sqrt{x^2+x+1}} \qquad I=\mathbf{R} \qquad (163)$$
$$f(x)=\frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} \qquad I=\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\qquad (164)$$
$$f(x)=\frac{x}{\left(x^2-1\right)^7} \qquad I=]-\infty;-1[\qquad (165)$$
$$f(x)=\frac{\sin(x)}{\cos^3(x)} \qquad I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\qquad (166)$$
$$f(x)=\frac{-2}{x(\ln(x)+3)^2} \qquad I=[1;+\infty[\qquad (167)$$
$$f(x)=\frac{-e^x}{e^x+2} \qquad I=\mathbf{R} \qquad (168)$$
$$f(x)=\frac{2}{x^2}e^{\frac{1}{x}} \qquad I=]0;+\infty[\qquad (169)$$
$$f(x)=x\sqrt{2x^2+1} \qquad I=\mathbf{R} \qquad (170)$$
$$f(x)=\frac{x^2}{x^3-1} \qquad I=]1;+\infty[\qquad (171)$$
$$f(x)=\frac{1}{3\sqrt{x}}+x-1 \qquad I=]0;+\infty[\qquad (172)$$
$$f(x)=\cos(x)\,e^{\sin(x)} \qquad I=\mathbf{R} \qquad (173)$$
$$f(x)=\sqrt{x} \qquad I=[0;+\infty[\qquad (174)$$
$$(175)$$

Exercice 75. [solution]

Soit F la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$F(x)=\int_1^x \sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que F est dérivable sur $\mathbf{R}$ et déterminer sa dérivée.
2. En déduire le sens de variation de F sur $\mathbf{R}$.

Exercice 76. [solution]

Déterminer la solution de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale donnée :

$$y'=4y \qquad y(0)=1 \qquad (176)$$
$$y'+\frac{1}{4}y=3 \qquad y(1)=1 \qquad (177)$$
$$5p=2p'-\frac{1}{4} \qquad p(0)=-1 \qquad (178)$$

C. Nombres complexes

Exercice 77. [solution]

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \left(2+i\sqrt{3}\right)(5-i)+\left(\frac{1}{2}+3i\right)^2 \qquad (179)$$
$$z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}+2i} \qquad (180)$$
$$z_3 = \frac{1+4i}{1-\sqrt{2}i} \qquad (181)$$

Exercice 78. [solution]

Déterminer le module des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \sqrt{6}+i\sqrt{2} \qquad (182)$$
$$z_2 = (1+2i)^3 \qquad (183)$$
$$z_3 = \frac{53-i}{53+i} \qquad (184)$$
$$z_4 = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^4 \qquad (185)$$

Exercice 79. [solution]

Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 20 \qquad (186)$$
$$z_2 = -7 \qquad (187)$$
$$z_3 = 7i \qquad (188)$$
$$z_4 = \frac{-i}{\sqrt{2}} \qquad (189)$$
$$z_5 = 3-3i \qquad (190)$$
$$z_6 = \left(\sqrt{3}+i\right)^5 \qquad (191)$$
$$z_7 = \frac{4}{1+i} \qquad (192)$$

Exercice 80. [solution]

Résoudre dans $\mathbf{C}$, chacune des équations suivantes :

$$z^2-3z+18 = 0 \qquad (193)$$
$$z^2+9z-4 = 0 \qquad (194)$$
$$z^2-\left(1-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3} = 0 \qquad (195)$$
$$z^2+2z+8 = 0 \qquad (196)$$

4 Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1. [**énoncé**]

Peut-être avez-vous une calculatrice qui connaît les fractions ?

Solution de l'exercice 2. [**énoncé**]

$A =]2.4;2.9]$, $B = [-1.9;0]$, $C =]-6;3]$, $D = [10;+\infty[$, $E = \emptyset$, $F = [2;3[$, $G = [-3.1;+\infty[$, $H = \mathbf{R}$, $I =]-4;+\infty[$, $J = [-2;+\infty[$.

Solution de l'exercice 3. [**énoncé**]

1. $A = 2^2 3^3 5^2$, $B = 2^2 3^2 7^2$, $C = 2^5 3^4 7^1$, $D = 2^8 3^3 5^2 7^2$.
2. $A = 2^{-2} 3^1 5^2 7^{-1}$, $B = 2^5 3^4 5^{-4} 7^1$, $C = 2^2 3^{-1} 7^{-2} 13^{-1}$.

Solution de l'exercice 4. [**énoncé**]

$A = a^5 c^2$, $B = \dfrac{a^3 c}{b^2}$, $C = \dfrac{-c^8}{a^4 b^6}$, $D = \dfrac{-a^8}{bc}$, $E = \dfrac{1}{a^7}$.

Solution de l'exercice 5. [**énoncé**]

$A = 9 - 4\sqrt{5}$, $B = \dfrac{13}{9} - \dfrac{4\sqrt{3}}{9}$, $C = 8$.

Solution de l'exercice 6. [**énoncé**]

$A(x) = -8x+3$, $B(x) = 65x^3+259x^2+4x-3$, $C(x) = -12x^2-15x+4$, $D(x) = \dfrac{1}{6}x^2 + 4x - 1$, $E(x) = (3-\sqrt{3})x^2 + (4-5\sqrt{3})x + 1 - \sqrt{3}$.

Solution de l'exercice 7. [**énoncé**]

Solution de l'exercice 8. [**énoncé**]

Solution de l'exercice 9. [**énoncé**]

Solution de l'exercice 10. [**énoncé**]

Solution de l'exercice 11. [**énoncé**]

Solution de l'exercice 12. [**énoncé**]

Solution de l'exercice 13. [**énoncé**]

Solution de l'exercice 14. [**énoncé**]