

E3A 2015 Marées

1 Notions qualitatives

A.1) Marées importantes dans des baies ouvertes à l'Ouest.

A.2) L'onde de marée se propage d'ouest en est. La rotation de la terre ne suffit pas à expliquer ce sens de propagation.

A.3) En gros, la période des marées océaniques est de 12 heures. La vitesse de propagation est de l'ordre de 200 km , d'où une longueur d'onde

$$V \sim \frac{200 \text{ km}}{2,5 \text{ h}} \sim 20 \text{ m.s}^{-1} \quad \lambda \sim V.T \sim 10^3 \text{ km}$$

A.4) Dans l'hémisphère nord, les courants sont déviés vers la droite de la trajectoire initiale.

A.5) D'après la carte fournie, l'amplitude des marées est de 11 m à St Malo, au lieu de 6 m en baie de Seine.

2 Champ de marée

B.1)

$$\vec{g}_A(M) = -\frac{G m_A}{r^2} \vec{e}_r$$

B.2) Tout plan contenant O est plan de symétrie pour la distribution de masse. En M, $\vec{g}_A(M)$ est donc colinéaire

au plan de la figure et au plan passant par O et M, perpendiculaire au plan de la figure.

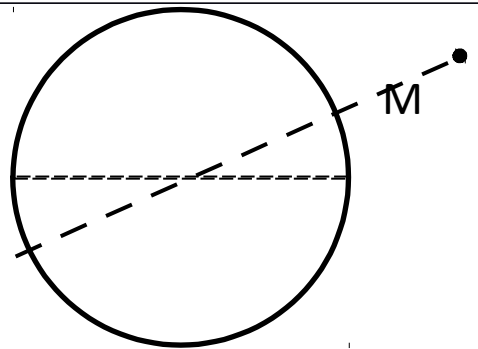
$\vec{g}_A(M)$ est colinéaire à ces deux plans, donc est radial.

$$\vec{g}_A(M)$$

Comme la distribution de masse est isotrope, $\vec{g}_A(M)$ ne

peut dépendre de la direction du vecteur \vec{OM} , donc

$$\vec{g}_A(M) = g_A(r) \vec{e}_r$$



B.3) Th de Gauss pour la gravitation : le flux de \vec{g} à travers une surface fermée est égale à la masse intérieure à cette surface,

multipliée par $(-4\pi G)$. Application au cas d'un astre sphérique : on choisit comme surface de gauss une sphère de rayon r ,

et on obtient Cqfd

$$g_A(r) 4\pi r^2 = m_A \cdot (4\pi G)$$

En dehors de l'astre, tout se passe pour le calcul de $\vec{g}_A(M)$ comme si toute la masse de cet astre était concentrée au centre de

l'astre.

B.4 et B.5)

Le référentiel géocentrique est en translation quasi-circulaire par rapport au réf héliocentrique. La force d'inertie d'entraînement exercée sur M est

$$\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}_{ent}, \text{ avec } \vec{a}_{ent} = \vec{a}_T. \text{ La LQM appliquée}$$

à la Terre dans (R_h) s'écrit

$$m_T \vec{a}_{R_h}^T = -\frac{m_T m_S}{ST^3} \vec{ST} = m_T \vec{g}_S(T), \text{ donc}$$

l'accélération d'entraînement en tout point de (R_T)

$$\vec{a}_{ent} = \vec{a}_{R_h}^T = -\frac{m_S}{ST^3} \vec{ST} = \vec{g}_S(T) \text{ et}$$

$$\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}_{R_h}^T = +\frac{m m_S}{ST^3} \vec{ST} = -m \vec{g}_S(T)$$

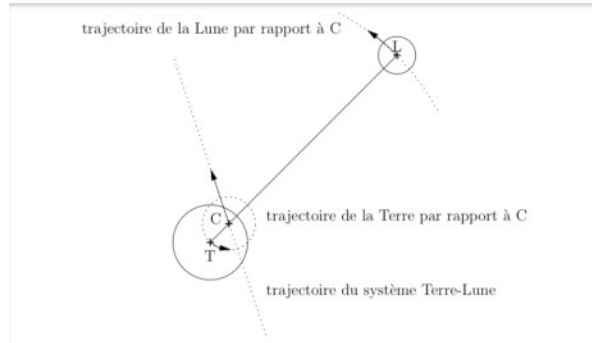


Figure 1 : Le point C, barycentre du système isolé {Terre, Lune}, se déplace selon un mouvement rectiligne uniforme. La Terre et la Lune tournent par rapport à ce point, de sorte que le référentiel géocentrique ne constitue pas un référentiel galiléen.

B.6) La résultante des forces de gravitation au point M dans (R_h) est

$$m \vec{g}_S(M) - m \vec{a}_{ent} = m [\vec{g}_S(M) - \vec{g}_S(T)] = m \vec{C}_S(M)$$

On a bien

$$\vec{g}_S(M) - \vec{g}_S(T) = -G m_S \left(\frac{\vec{SM}}{SM^3} - \frac{\vec{ST}}{ST^3} \right)$$

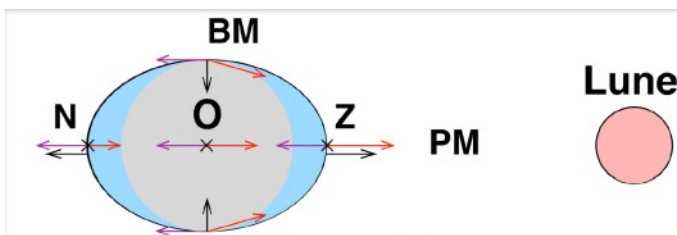


Figure 2 : L'attraction différentielle gravitationnelle de la Lune sur la Terre crée des forces de marée (flèche noire). Il s'agit du résidu entre l'attraction en un point (flèche rouge) et l'attraction moyenne s'exerçant au centre de la terre (flèche violette).

B.7) BM : Basse Mer et PM : Pleine Mer

B.8) BM : basse mer ; PM : pleine mer.

Les points de marée basse sont situés dans le plan perpendiculaire à l'axe \overline{TL}

B.9) $\frac{T_{Lune}^2}{TL^3} = \frac{4\pi^2}{G m_T}$, d'où $T_{Lune} = 2,3 \cdot 10^6 s = 27 \text{ jours}$

B.10) Très difficile ! $T_{propre} \approx 1 \text{ jour} = 86400 s$

, donc, en première approximation, on peut faire comme si la lune ne bougeait pas.

$$T_{Lune} \ll T_{propre}$$

$$B.11) \quad \overline{LM} = \overline{LT} + \overline{TM} = -d_L \vec{e}_z + r \vec{e}_r; \quad LM^2 = d_L^2 \left(1 - 2 \frac{r}{d_L} \vec{e}_z \cdot \vec{e}_r + \frac{r^2}{d_L^2} \right) = d_L^2 \left(1 - 2 \frac{r}{d_L} \cos \theta + \frac{r^2}{d_L^2} \right)$$

$$LM^3 = d_L^3 \left(1 - 2 \frac{r}{d_L} \cos \theta + \frac{r^2}{d_L^2} \right)^{3/2} \approx d_L^3 \left(1 - 3 \frac{r}{d_L} \cos \theta \right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{LM^3} \approx \frac{1}{d_L^3} \left(1 + 3 \frac{r}{d_L} \cos \theta \right)$$

$$B.12) \quad \vec{C}_L(M) = \left[\vec{g}_L(M) - \vec{g}_L(T) \right] = G m_L \left(-\frac{\overline{LM}}{LM^3} + \frac{\overline{LT}}{LT^3} \right) \approx \frac{G m_L}{d_L^3} \left[\left(1 + 3 \frac{r}{d_L} \cos \theta \right) (d_L \vec{e}_z - r \vec{e}_r) - d_L \vec{e}_z \right]$$

On a bien

$$\vec{C}_L(M) \approx \frac{G m_L r}{d_L^3} \left[3 \cos \theta \vec{e}_z - \vec{e}_r \right]$$

B.13) Le rapport du terme de marée Lunaire sur terme solaire est

$$\frac{C_L(M)}{C_S(M)} \sim \frac{m_L}{m_S} \left(\frac{d_S}{d_L} \right)^3 \sim 2,2$$

B.14)

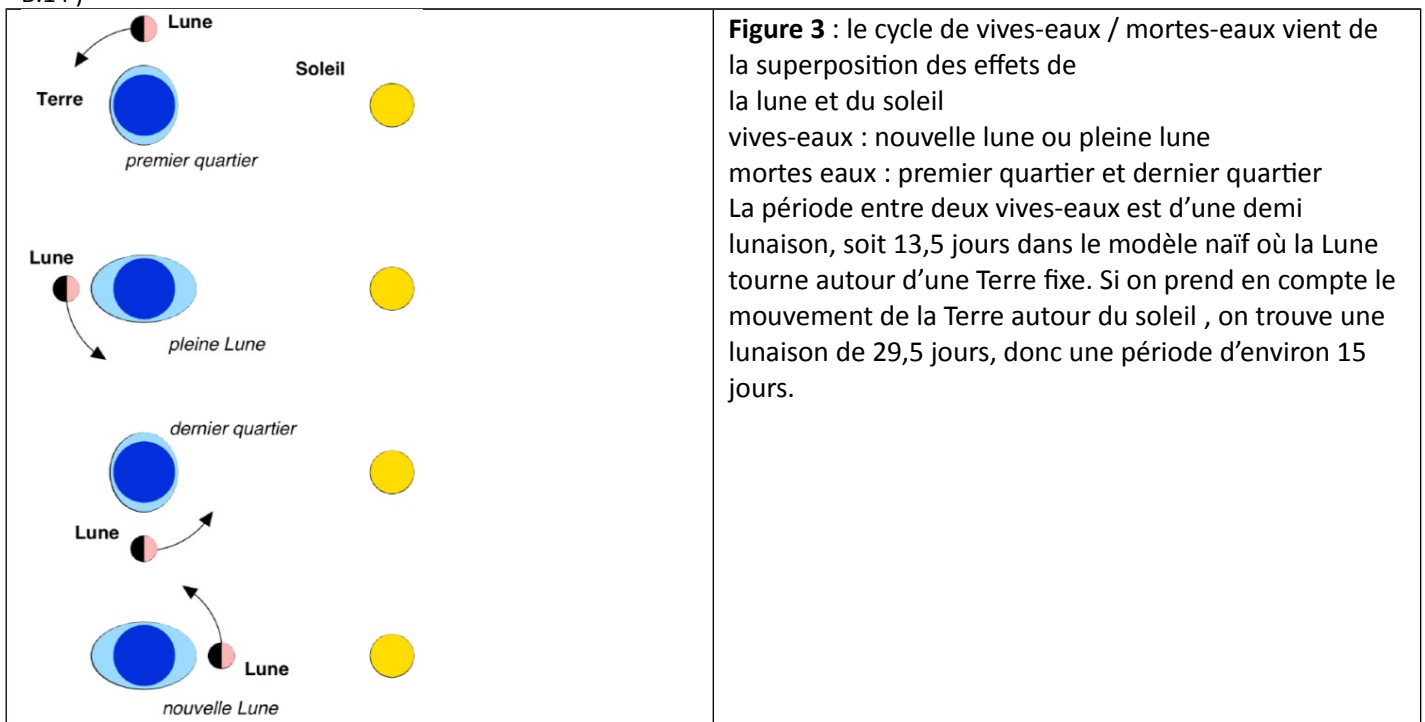


Figure 3 : le cycle de vives-eaux / mortes-eaux vient de la superposition des effets de la lune et du soleil
 vives-eaux : nouvelle lune ou pleine lune
 mortes eaux : premier quartier et dernier quartier
 La période entre deux vives-eaux est d'une demi lunaison, soit 13,5 jours dans le modèle naïf où la Lune tourne autour d'une Terre fixe. Si on prend en compte le mouvement de la Terre autour du soleil, on trouve une lunaison de 29,5 jours, donc une période d'environ 15 jours.

3 Amplitude des marées océaniques

C.1) dimension de h : $[h] = M^{1+\alpha} \cdot L^{\beta-3} = L^1$, donc $\alpha = -1$ et $\beta = 4$

A.N :

$$\Delta h = \frac{m_L}{m_T} \frac{R_T^4}{d_L^3} \approx 0,4 m$$

C.2) La loi de l'hydrostatique traduit l'équilibre du fluide. Dimension :

$$[\vec{f}_V] = M \cdot L^{-2} \cdot T^{-2}$$

On avait (B.12)

$$\vec{C}_L(M) \approx \frac{Gm_L r}{d_L^3} \left[(3 \cos^2 \theta - 1) \vec{e}_r - 3 \sin \theta \cos \theta \vec{e}_\theta \right]$$

On en déduit

$$\vec{f}_v = \mu \frac{Gm_L r}{d_L^3} \left[(3 \cos^2 \theta - 1) \vec{e}_r - 3 \sin \theta \cos \theta \vec{e}_\theta \right] - \mu \frac{Gm_T}{r^2} \vec{e}_r$$

C.3) L'énergie potentielle volumique liée à l'attraction terrestre est

$$V_T(r, \theta) = -\mu \frac{Gm_T}{r} + C^{te} \quad \text{On choisit } \lim_{r \rightarrow \infty} V_T(r) = 0$$

d'où

$$C^{te} = 0$$

C.4)

$$V_T + V_L(r, \theta) = -\mu G \left[\frac{m_T}{r} + \frac{m_L}{d_L^3} \frac{r^2}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \right]$$

La loi de l'hydrostatique s'écrit

$$\vec{\text{grad}} p = \vec{f}_v = -\vec{\text{grad}}(V_T + V_L) \quad \text{, soit } \vec{\text{grad}}(p + V_T + V_L) = \vec{0} \quad \text{La quantité } p + V_T + V_L$$

est donc uniforme dans le fluide. La surface de l'eau étant une isobare, on a

$$(V_T + V_L)(r, \theta) = C^{te} \quad \text{à la surface de l'eau, donc}$$

à la surface.

$$\frac{m_T}{r} + \frac{m_L}{d_L^3} \frac{r^2}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) = C^{te} = \frac{m_T}{R_T} \quad (1)$$

C.5)

$$r = R_T + h \quad ; \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{R_T} \left(1 - \frac{h}{R_T} \right) \quad ; \quad r^2 \approx R_T^2 \left(1 + 2 \frac{h}{R_T} \right) \quad \text{L'équation } (1) \text{ décrit}$$

, soit

$$\frac{m_T}{R_T} \left(1 - \frac{h}{R_T} \right) + \frac{m_L}{d_L^3} \frac{R_T^2}{2} \left(1 + 2 \frac{h}{R_T} \right) (3 \cos^2 \theta - 1) = \frac{m_T}{R_T}$$

$$h \left[\frac{m_T}{R_T^2} - \frac{m_L R_T}{d_L^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \right] = \frac{m_L R_T^2}{2 d_L^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

Avec , on obtient

$$\frac{m_L R_T}{d_L^3} \ll \frac{m_T}{R_T^2} \quad \text{, donc} \quad h \frac{m_T}{R_T^2} = \frac{m_L R_T^2}{2 d_L^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad h = \frac{m_L R_T^4}{2 m_T d_L^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

C.6) Le marnage est maximal, comme attendu, pour

$$\theta = 0 \quad \text{et} \quad \theta = \pi$$

(donc à l'équateur).

Il est négatif et d'amplitude moitié aux pôles

$$(\theta = \pm \pi / 2)$$

C.7) A l'équateur,

$$h_E = \frac{m_L R_T^4}{m_T d_L^3} \sim 0,4 m$$