Corrigé du Devoir Surveillé n°09.

Exercice (E4A 2000 extrait).

1. Le rappel fait en début d'exercice incite à essayer les matrices de la base canonique.
   Par exemple : $E_{1,1}.E_{2,1} = \delta_{1,2}.E_{1,1} = 0$, et : $E_{2,1}.E_{1,1} = \delta_{1,1}.E_{2,1} = E_{2,1}$.
   Donc pour toute norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on aura :
   $N(E_{1,1}.E_{2,1}) = N(0) = 0$, et : $N(E_{2,1}.E_{1,1}) = N(E_{2,1}) \neq 0$, puisque : $E_{2,1} \neq 0$.
   Il ne peut donc exister de norme N sur E satisfaisant la condition imposée.
2. Il suffit d'appliquer les règles de calcul dans l'espace des matrices et :
   - $X.Y = \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} \lambda_r.E_{1,j}.E_{r,1} + \sum_{i=2}^{n}\sum_{r=1}^{n} \lambda_r.E_{i,i}.E_{r,1} = \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\right).E_{1,1} + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i.E_{i,1} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}\lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_2 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, et :
   - $Y.X = \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} \lambda_r.E_{r,j} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_n & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$.

   Remarque : les deux matrices ont même trace, étonnant, non ?
3. a. Il suffit de prendre : $A = 0$, $\lambda = 0$, et on obtient : $q(0) = q(\lambda.A) = |\lambda|.q(A) = 0.q(0) = 0$.
   Puis : ∀ A ∈ E, $q(-A) = |-1|.q(A) = q(A)$.
   b. Pour : (A,B) ∈ E^2, il suffit d'écrire :
   $q(A) = q(A+B-B) \leq q(A+B) + q(B)$, d'où : $q(A) - q(B) \leq q(A+B)$, et de même :
   $q(B) - q(A) \leq q(B+A) = q(A+B)$, d'où le résultat, car :
   $|q(A) - q(B)| = \max(q(A) - q(B), q(B) - q(A))$.
   On en déduit que si : $q(B) = 0$, alors : $|q(A)| = q(A) \leq q(A+B) \leq q(A) + q(B) = q(A)$, d'où :
   $q(A+B) = q(A)$.
4. Tout d'abord : ∀ A ∈ E, $f(A) \in \mathbb{R}^+$.
   Puis : ∀ A ∈ E, ∀ λ ∈ ℂ, $f(\lambda.A) = |tr(\lambda.A)| = |\lambda|.|tr(A)| = |\lambda|.f(A)$,
   et : ∀ (A,B) ∈ E^2, $f(A+B) = |tr(A+B)| = |tr(A) + tr(B)| \leq |tr(A)| + |tr(B)| = f(A) + f(B)$,
   et enfin : ∀ (A,B) ∈ E^2, $f(A.B) = |tr(A.B)| = |tr(B.A)| = f(B.A)$.
5. a. On peut constater que : ∀ 1 ≤ i ≠ j ≤ n, $E_{i,j}.E_{i,i} = \delta_{j,i}.E_{i,i} = 0$, et : $E_{i,i}.E_{i,j} = \delta_{i,i}.E_{i,j} = E_{i,j}$
   Donc si q est une semi-norme vérifiant (P), alors : $q(E_{i,j}) = q(E_{i,i}.E_{i,j}) = q(E_{i,j}.E_{i,i}) = q(0) = 0$.
   b. Pour A quelconque, il suffit alors d'appliquer la question 5.a, pour obtenir que :
   $q(A) = q\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.E_{i,i} + \sum_{i\neq j} a_{i,j}.E_{i,j}\right) = q\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.E_{i,i}\right)$,
   puisque toutes les autres matrices ont une semi-norme nulle et en généralisant par récurrence à un nombre quelconque fini de matrices le résultat de la question 3.b.
   c. On vient de constater que la semi-norme de A ne dépend en fait que de ses éléments diagonaux, donc les matrices A et $\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,n} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ ont même semi-norme.
   On pose alors : $X = \sum_{j=1}^{n} E_{1,j} + \sum_{i=2}^{n} E_{i,i}$, et : $Y = \sum_{r=1}^{n} a_{r,r}.E_{r,1}$, et on a : $Y.X = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,n} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$.
   Donc la question 2 donne alors :

$$q(A) = q(Y.X) = q(X.Y) = q\left(\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,2} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,n} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right) = q\left(tr(A).E_{1,1} + \sum_{i=2}^{n} a_{i,i}.E_{i,1}\right) = q(tr(A).E_{1,1}),$$

puisque, là encore, toutes les autres matrices ont une semi-norme nulle.

Donc : $q(A) = |tr(A)|.q(E_{1,1})$, et en posant : $\alpha = q(E_{1,1}) \in \mathbb{R}^+$, on a bien : $q(A) = \alpha.|tr(A)| = \alpha.f(A)$.

d. Toute semi-norme sur E vérifiant (P) est donc de la forme : $q = \alpha.f$, avec : $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Réciproquement, il est immédiat (avec la question 4 notamment) que toute application de cette forme est une semi-norme sur E vérifiant (P).

Problème (EPITA 2015).

Partie 1 : une intervention des matrices stochastiques en probabilités.

1. a. La probabilité cherchée est donc celle de l'événement AB_{n+1} sachant AB_n, autrement dit la probabilité que A est B ne soient pas éliminés à l'issue du $(n+1)^{ième}$ tir sachant qu'ils ne l'étaient pas à l'issue du $n^{ième}$, autrement dit la probabilité qu'ils se ratent tous les deux au $(n+1)^{ième}$ tir.

Donc : $P_{AB_n}(AB_{n+1}) = P(\overline{T_{A,n}} \cap \overline{T_{B,n}})$,

où on note $T_{A,n}$ et $T_{B,n}$ les événements « A touche au $n^{ième}$ tir », et « B touche au $n^{ième}$ tir ».

Or les tirs de A et de B sont réputés indépendants (et faits de façon identiques quelque soit le tir), donc :

$$P_{AB_n}(AB_{n+1}) = P(\overline{T_{A,n}}).P(\overline{T_{B,n}}) = \left(1-\frac{2}{3}\right).\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}.$$

b. De même :

- $P_{AB_n}(A_{n+1}) = P(T_{A,n} \cap \overline{T_{B,n}}) = P(T_{A,n}).P(\overline{T_{B,n}}) = \frac{2}{3}.\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}$,
- $P_{AB_n}(B_{n+1}) = P(\overline{T_{A,n}} \cap T_{B,n}) = P(\overline{T_{A,n}}).P(T_{B,n}) = \left(1-\frac{2}{3}\right).\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$,
- $P_{AB_n}(\varnothing_{n+1}) = P(T_{A,n} \cap T_{B,n}) = P(T_{A,n}).P(T_{B,n}) = \frac{2}{3}.\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.

c. Si $(E_n)_{1\le k\le n}$ est un système complet (fini) d'événements, alors : $\forall E \in \mathcal{A}$, $P(E) = \sum_{k=1}^{n} P_{E_k}(E).P(E_k)$.

Pour n fixé dans $\mathbb{N}$, on va utiliser le système complet d'événements $(AB_n, A_n, B_n, \varnothing_n)$.

On peut alors écrire :

$$P(AB_{n+1}) = P_{AB_n}(AB_{n+1}).P(AB_n) + P_{A_n}(AB_{n+1}).P(A_n) + P_{B_n}(AB_{n+1}).P(B_n) + P_{\varnothing_n}(AB_{n+1}).P(\varnothing_n),$$

Or A et B ne peuvent être encore en course à l'issue de $(n+1)^{ième}$ que s'ils l'étaient encore à l'issue du $n^{ième}$ tir et donc les trois dernières probabilités conditionnelles sont nulles, et :

- $P(AB_{n+1}) = \frac{2}{9}.P(AB_n)$.

De même : $P(A_{n+1}) = P_{AB_n}(A_{n+1}).P(AB_n) + P_{A_n}(A_{n+1}).P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1}).P(B_n) + P_{\varnothing_n}(A_{n+1}).P(\varnothing_n)$, et :

- $P(A_{n+1}) = \frac{4}{9}.P(AB_n) + 1.P(A_n) + 0.P(B_n) + 0.P(\varnothing_n) = \frac{4}{9}.P(AB_n) + 1.P(A_n)$,

puisque si A reste seul à l'issue du $n^{ième}$ tir, il est certain de l'être encore à l'issue du $(n+1)^{ième}$ et s'il ne reste que B (ou personne) à l'issue de $n^{ième}$ tir, A ne peut plus être dans la partie à l'issue du $(n+1)^{ième}$.

De même :

- $P(B_{n+1}) = \frac{1}{9}.P(AB_n) + 1.P(B_n)$, et :
- $P(\varnothing_{n+1}) = \frac{2}{9}.P(AB_n) + 0.P(A_n) + 0.P(B_n) + 1.P(\varnothing_n)$.

Pour cette dernière égalité, s'il n'y avait plus que A (ou B) à l'issue de $n^{ième}$ tir, il est impossible qu'il n'y ait plus personne à l'issue du $(n+1)^{ième}$, et s'il n'y avait plus personne à l'issue du $n^{ième}$, il en sera de même à l'issue du $(n+1)^{ième}$.

On remarque bien sûr que la somme des probabilités trouvée vaut 1…

Finalement, on constate que : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $E_{n+1} = E_n.M$, en posant : $M = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Il est immédiat que M est bien stochastique.

Enfin, par récurrence, on en déduit que : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $E_n = E_0.M^n$.

2. a. La matrice M étant triangulaire supérieure, on lit ses valeurs propres sur sa diagonale et 1 est valeur propre triple, $\frac{2}{9}$ est valeur propre simple.

   b. L'espace propre associé à $\frac{2}{9}$ est la droite : $Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, de façon immédiate.

   L'espace propre associé à 1 s'obtient en résolvant le système : $M.X = 1.X$.

   C'est donc l'hyperplan dont l'équation dans la base canonique est :

   $\frac{2}{9}.x_1 + \frac{4}{9}.x_2 + \frac{1}{9}.x_3 + \frac{2}{9}.x_4 = x_1$, soit encore : $7.x_1 - 4.x_2 - x_3 - 2.x_4 = 0$.

   c. Puisque le premier vecteur colonne est dans l'espace propre $E_{\frac{2}{9}}(M)$, les autres seront dans l'autre espace propre et il (faut et il) suffit de prendre : $x = 4$, $y = 1$, et : $z = 2$, pour obtenir ce que l'on veut.

   d. P est évidemment inversible puisque son déterminant vaut : $7^3 = 343 \neq 0$.

   On a ensuite : $P^{-1}.M.P = D = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, puisque D représente l'endomorphisme canoniquement associé à M dans une base de vecteurs propres.

   Enfin on trouve sans trop de difficulté : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$.

3. a. Avec les suites coefficients, on a immédiatement : $\lim_{n\to+\infty} D^n = \lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{9}\right)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   De plus : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $M^n = P.D^n.P^{-1}$, et comme l'application : $X \mapsto P.X.P^{-1}$, est linéaire de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dans lui-même (espace de dimension finie), elle est donc continue et :

$$\lim_{n\to+\infty} M^n = P.\lim_{n\to+\infty} D^n.P^{-1} = P.\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.P^{-1} = \begin{pmatrix}0&\frac{4}{7}&\frac{1}{7}&\frac{2}{7}\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

b. Avec un argument similaire à celui de la question précédente, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} E^n = E_0.\lim_{n\to+\infty} M^n = (1\quad 0\quad 0\quad 0).\begin{pmatrix}0&\frac{4}{7}&\frac{1}{7}&\frac{2}{7}\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&\frac{4}{7}&\frac{1}{7}&\frac{2}{7}\end{pmatrix}.$$

Notons G_A l'événement « A gagne ».

Alors : $G_A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, et comme : $\forall$ n ≥ 1, $A_n \subset A_{n+1}$, (si A est le seul restant à l'issue du $n^{ième}$ tir, il l'est encore à l'issue du $(n+1)^{ième}$) par croissance de la probabilité, on a donc :

$P(G_A) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = \frac{4}{7}$, et la probabilité que A remporte le combat vaut : $\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = \frac{4}{7}$.

De même, la probabilité que B remporte le combat vaut $\frac{1}{7}$ et celle que tous deux soient éliminés $\frac{2}{7}$.

4. a. L'événement $(T=1)$ correspond à l'événement ($A_1 \cup B_1 \cup \varnothing_1$), et par incompatibilité :

$$P(T=1) = P(A_1) + P(B_1) + P(\varnothing_1) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$

b. On a évidemment : $\forall$ n ≥ 1, $(T \geq n+1) = AB_1 \cap ... \cap AB_n$, puisque le combat ne se termine que si l'un des deux joueurs est éliminé (ou les deux).

Donc le combat se termine au minimum au $(n+1)^{ième}$ tir si et seulement si les deux joueurs sont restés dans la partie à l'issue des n premiers tirs, d'où l'égalité d'événements.

On en déduit que, avec la formule des probabilités conditionnelles que :

$$P(T \geq n+1) = p(T > n) = P(AB_1 \cap ... \cap AB_n) = P(AB_1).P_{AB_1}(AB_2)...P_{AB_1\cap...\cap AB_{n-1}}(AB_n),$$

et chacune de ces probabilités conditionnelles vaut (comme dans la question 1.a) $\frac{2}{9}$.

Donc : $\forall$ n ≥ 1, $p(T>n) = \left(\frac{2}{9}\right)^n$.

Enfin : $\forall$ n ≥ 2, $(T > n-1) = (T=n) \cup (T>n)$, et par incompatibilité :

$$P(T=n) = P(T>n-1) - P(T>n) = \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} - \left(\frac{2}{9}\right)^n = \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}.\left(1-\frac{2}{9}\right) = \frac{7}{9}.\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1},$$

égalité encore valable pour : $n=1$.

c. On peut reconnaître évidemment que T suit une loi géométrique ou :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(T=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7}{9}.\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} = \frac{7}{9}.\frac{1}{1-\frac{2}{9}} = 1.$$

En particulier l'événement $\bigcup_{n=1}^{+\infty}(T=n)$ correspond au fait que le jeu se termine et donc un événement presque sûr puisque de probabilité 1.

De plus la série $\sum_{n\geq 1} n.P(T=n)$ est absolument convergente et :

$\sum_{n=1}^{+\infty} n.P(T=n) = \frac{7}{9}.\sum_{n=1}^{+\infty} n.\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} = \frac{7}{9}.\frac{1}{\left(1-\frac{2}{9}\right)^2} = \frac{9}{7}$, en utilisant la dérivée de la série géométrique.

On aurait pu aussi utiliser la dérivée en 1 de la série génératrice de T pour calculer cette espérance.

Partie 2 : étude des puissances des matrices stochastiques.

5. a. Soient ainsi deux matrices A et B dans $\mathcal{S}_n$.

Si on note : $C = A.B$, alors : $\forall$ 1 ≤ i,j ≤ n, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}.b_{k,j} \geq 0$, et :

$\forall$ 1 ≤ i ≤ n, $\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}.b_{k,j}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,k}.b_{k,j}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}.\left(\sum_{j=1}^{n} b_{k,j}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}.1 = 1$.

Donc : $A.B \in \mathcal{S}_n$, et $\mathcal{S}_n$ est bien stable par produit.

b. Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices stochastiques, convergente.

Alors toutes les suites coefficients (notées $(a_{i,j}^{(p)})$) convergent, chacune vers une limite notée $a_{i,j}$.

On a ensuite : $\forall$ 1 ≤ i,j ≤ n, $a_{i,j}^{(p)} \geq 0$, et faisant tendre n vers +∞ : $a_{i,j} \geq 0$

De plus : $\forall$ p ∈ ℕ, $\forall$ 1 ≤ i ≤ n, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^{(p)} = 1$, et à nouveau à la limite : $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

Donc la limite A de cette suite est bien elle aussi stochastique.

c. Si la suite (M^k) converge vers L, la suite $(M^{2.k})$ étant extraite de cette suite converge aussi vers L.
Mais de plus par continuité de l'application : $X \mapsto X^2$, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (puisque toutes les fonctions coordonnées sont polynomiales en les coordonnées de X donc continues), la suite $(M^{2.k})$ tend aussi vers L^2, et donc par unicité de la limite, on en déduit que : $L = L^2$.
Donc L est bien une matrice de projection.

d. C'est une démonstration classique :

Pour : ε > 0 ∃ N ∈ ℕ*, $\forall$ i ≥ N, $\left\|M^i - L\right\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Puis : $\forall$ k ≥ N, $\left\|C_k - L\right\|_\infty = \left\|\frac{I_n + M + ... + M^k}{k} - L\right\|_\infty \leq \frac{1}{k}.\sum_{i=0}^{k}\left\|M^i - L\right\|_\infty \leq \frac{1}{k}.\sum_{i=0}^{N}\left\|M^i - L\right\|_\infty + \frac{(k-N)}{k}.\frac{\varepsilon}{2}$.

Et comme $\sum_{i=0}^{N}\left\|M^i - L\right\|_\infty$ ne dépend pas de k : ∃ N' ≥ N, $\forall$ k ≥ N', $\frac{1}{k}.\sum_{i=0}^{N}\left\|M^i - L\right\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc : $\forall$ k ≥ N', $\left\|C_k - L\right\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, ce qui prouve que la suite (C_k) tend bien vers L.

6. a. En notant : $w = M.v_1$, on a : $\forall$ 1 ≤ i ≤ n, $w_i = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}.1 = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1$, autrement dit : $M.v_1 = v_1$, et v_1 est vecteur propre de M associé à la valeur propre 1.

b. On a, pour : x ∈ ℂⁿ, et en posant : $y = M.x$,

$\forall$ 1 ≤ i ≤ n, $|y_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}.x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n}\left|m_{i,j}.x_j\right| = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}.\left|x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}.\left\|x\right\|_\infty = \left\|x\right\|_\infty.\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = \left\|x\right\|_\infty$.

On en déduit que : $\left\|M.x\right\|_\infty = \left\|y\right\|_\infty \leq \left\|x\right\|_\infty$.

Si maintenant λ est une valeur propre de M et x un vecteur propre associé, on a :
$\left\|M.x\right\|_\infty = \left\|\lambda.x\right\|_\infty = |\lambda|.\left\|x\right\|_\infty \leq \left\|x\right\|_\infty$, et donc (puisque : x ≠ 0, donc : $\left\|x\right\|_\infty \neq 0$), on déduit que : $|\lambda| \leq 1$.

Comme somme des valeurs propres de M, on déduit que : $|tr(M)| \leq \sum_{\lambda\in Sp(M)} |\lambda| \leq n$, et comme produit des valeurs propres : $|\det(M)| = \prod_{\lambda\in Sp(M)} |\lambda| \leq 1$.

Une matrice stochastique peut réaliser des égalités, comme le montre la matrice I_n.

c. Soit donc : $y \in \mathrm{Im}(M - I_n) \cap \ker(M - I_n)$, avec : $y = M.x - x$.

Alors : $M^1 x = M.x = 1.y + x$, et si on suppose vraie l'égalité proposée pour : k ≥ 1, alors :

$M^{k+1}.x = M.(k.y + x) = k.M.y + M.x = k.y + (y + x) = (k+1).y + x$, puisque : $(M - I_n).y = 0$.

Ainsi, on a établi l'égalité demandée par récurrence.

On en déduit que : ∀ k ∈ ℕ*, $M.y = y = \frac{1}{k+1}.(M^{k+1}.x - x)$, et, avec la généralisation par récurrence de la propriété de la question II.6.b, (ou parce que $\mathcal{S}_n$ est stable par produit donc : $M^k \in \mathcal{S}_n$), on en déduit que : $\|y\|_\infty \leq \frac{1}{k}.(\|M^k.x\|_\infty + \|x\|_\infty) \leq \frac{1}{k}.(\|x\|_\infty + \|x\|_\infty) = \frac{2}{k}.\|x\|_\infty$

d. En faisant tendre k vers +∞, on en déduit par encadrement que : $0 \leq \|y\|_\infty \leq \lim_{k\to+\infty} \frac{2}{k}.\|x\|_\infty = 0$.

Donc : $\|y\|_\infty = 0$, et : $y = 0$.

Les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n$ sont donc en somme directe, et le théorème du rang donne de plus : $\dim(\mathrm{Im}(M - I_n)) + \dim(\ker(M - I_n)) = n$, soit donc : $\mathrm{Im}(M - I_n) \oplus \dim(\ker(M - I_n) = \mathbb{C}^n$.

7. a. On part de : $x = x_1 + x_2$.

Puis : ∀ i ∈ ℕ, $M^i.x_1 = x_1$, car : $x_1 \in \ker(M - I_n)$, et donc : $M.x_1 = x_1$, et : $M^i.x_2 = M^{i+1}.z - M^i.z$.

Donc : $C_k.x = \frac{1}{k+1}.(\sum_{i=0}^{k} M^i.x_1 + \sum_{i=0}^{k} M^i.x_2) = \frac{1}{k+1}.((k+1).x_1 + M^{k+1}.z - z) = x_1 + \frac{1}{k+1}.(M^{k+1}.z - z)$.

Et donc : $\|C_k.x - x_1\|_\infty = \|C_k.x - P.x\|_\infty = \frac{1}{k+1}.\|M^{k+1}.z - z\|_\infty \leq \frac{1}{k+1}.(\|M^{k+1}.z\|_\infty + \|z\|_\infty) \leq \frac{2}{k+1}.\|z\|_\infty$.

b. On en déduit que : $\lim_{k\to+\infty} \|C_k.x - P.x\|_\infty = 0$, soit : $\lim_{k\to+\infty} C_k.x = P.x$.

En notant $(c_{i,j}^{(k)})$ les suites coefficients de la suite (C_k), on utilise les vecteurs ε_j de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et : ∀ 1 ≤ j ≤ n, $\lim_{k\to+\infty} C_k.\varepsilon_j = P.\varepsilon_j$.

Donc : ∀ 1 ≤ j ≤ n, ∀ 1 ≤ i ≤ n, $\lim_{k\to+\infty} c_{i,j}^{(k)}.1 = p_{i,j}$, en développant le produit.

Finalement : $\lim_{k\to+\infty} C_k = P$.

c. Attention, il n'y a pas équivalence de convergence pour (M^k) et (C_k).

Mais si la suite (M^k) converge, alors (C_k) converge vers la même limite, donc si (M^k) converge, elle converge vers la matrice P.

8. a. Le premier résultat est immédiat : $M.x = \lambda.x$, donc : $(M - I_n).x = \lambda.x - x = (\lambda - 1).x$.

Donc si : $\lambda \neq 1$, alors : $x = \frac{1}{\lambda - 1}.(M - I_n).x \in \mathrm{Im}(M - I_n)$, et on a bien : $\ker(M - \lambda.I_n) \subset \mathrm{Im}(M - I_n)$.

b. On sait que la somme $\ker(M - \lambda_2.I_n) + ... + \ker(M - \lambda_p.I_n)$, est directe puisque les λ_i sont distincts.

Chaque noyau étant de plus inclus dans $\mathrm{Im}(M - I_n)$, on a :

$\ker(M - \lambda_2.I_n) \oplus ... \oplus \ker(M - \lambda_p.I_n) \subset \mathrm{Im}(M - I_n)$.

Enfin : $\dim(\ker(M - \lambda_2.I_n)) + ... + \dim(\ker(M - \lambda_p.I_n)) = n - \dim(\ker(M - I_n)) = \dim(\mathrm{Im}(M - I_n))$, car M est diagonalisable, donc on conclut que : $\ker(M - \lambda_2.I_n) \oplus ... \oplus \ker(M - \lambda_p.I_n) = \mathrm{Im}(M - I_n)$.

c. Du fait de la question précédente, x_1 est la projection de x sur $\ker(M - I_n)$ dans la direction de la somme des autres sous-espaces propres soit : $\ker(M - \lambda_2.I_n) \oplus ... \oplus \ker(M - \lambda_p.I_n) = \mathrm{Im}(M - I_n)$.

Donc : $x_1 = P.x$.

Puis immédiatement par récurrence : ∀ k ∈ ℕ, $M^k.x = x_1 + \lambda_2^k.x_2 + ... + \lambda_p^k.x_p$.

Donc : $M^k.x = x_1 + \lambda_2^k.x_2 + ... + \lambda_p^k.x_p$, et : $\|M^k.x - P.x\|_\infty \leq |\lambda_2|^k.\|x_2\|_\infty + ... + |\lambda_p|^k.\|x_p\|_\infty$.

Enfin, comme tous les modules sont strictement plus petits que 1, on conclut que :

$\lim_{k\to+\infty} \|M^k.x - P.x\|_\infty = 0$, d'où : $\lim_{k\to+\infty} M^k.x = P.x$.

On termine comme dans la question 7.b pour en déduire que : $\lim_{k\to+\infty} M^k = P$.

d. En taille 2×2, on peut proposer la matrice : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Elle est bien stochastique, mais ses valeurs propres sont ±1 et donc M ne rentre pas dans le cadre de la question 8.

On remarque enfin que : ∀ k ∈ ℕ, $M^{2.k} = I_2$, et : $M^{2.k+1} = M$.

Donc la suite (M^k) diverge puisque les deux suites extraites ci-dessus convergent vers des limites différentes.