Corrigé du Devoir Surveillé n°06 (version 1).

Problème (CCP PC 2012).

Partie 1 : le polylogarithme.

1. a. Soit : x ∈ ℝ*.

On applique alors la règle de d'Alembert à la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$.

On constate que : ∀ n ∈ ℕ*, $\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^\alpha}.\frac{n^\alpha}{x^n}\right| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha}.|x|$, qui tend vers |x| quand n tend vers +∞.

Donc il y a absolue convergence de la série quand : |x| < 1, et divergence grossière que : |x| > 1.
La valeur charnière positive est donc : x = 1, et on en déduit que : R = 1.

b. Comme série entière, la somme définissant L_α est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence, soit ici sur]-1,+1[.

c. Pour : x ∈]-1,+1[, on peut écrire :

$$L_\alpha(-x) + L_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n^\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n+1}{n^\alpha}.x^n .$$

Or dans cette somme, les termes d'indices impairs s'annulent, et ceux d'indice pairs donnent :

∀ n = 2.p ∈ ℕ*, $\frac{(-1)^n+1}{n^\alpha} = \frac{2}{(2.p)^\alpha} = 2^{1-\alpha}.\frac{1}{p^\alpha}$.

Donc si on réindexe la série avec p, on obtient :

$$L_\alpha(-x) + L_\alpha(x) = 2^{1-\alpha}.\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^\alpha}.x^{2.p} = 2^{1-\alpha}.\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^\alpha}.(x^2)^p = 2^{1-\alpha}.L_\alpha(x^2).$$

2. a. Dans la question I.1.b, on a dit que toute série entière était de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence, mais on sait de plus qu'on obtient ses dérivées en dérivant terme à terme la série.

Donc : ∀ x ∈]-1,+1[, $L_{\alpha+1}'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^{\alpha+1}}.x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n^\alpha}$, et donc : $x.L_{\alpha+1}'(x) = L_\alpha(x)$.

Pour x non nul, on a donc : $L_{\alpha+1}'(x) = \frac{L_\alpha(x)}{x}$, cette fonction étant prolongeable par continuité en 0.

On peut donc écrire : ∀ x ∈]-1,+1[, $L_{\alpha+1}(x) = \int_0^x \frac{L_\alpha(t)}{t}.dt$, où la fonction sous l'intégrale a été prolongée par continuité en 0.

b. Pour : x ∈]-1,+1[, on a :

- $L_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - 1 = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$,
- $L_{-1}(x) = x.L_0'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$,
- $x.L_1'(x) = L_0(x)$, donc pour x non nul : $L_1(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x)$, égalité encore valable pour x nul.

c. On constate que : ∀ x ∈]0,1[, ∀ n ∈ ℕ*, $\frac{x^n}{n} \le \frac{x^n}{n^\alpha}$, donc en sommant ces séries convergentes :

∀ x ∈]0,1[, $L_1(x) \le L_\alpha(x)$, soit : $-\ln(1-x) \le L_\alpha(x)$.

Si on fait tendre x vers 1, on en déduit par minoration que : $\lim_{x\to1} L_\alpha(x) = +\infty$.

Partie 2 : prolongement pour : α > 1.

1. a. Pour cela, on va montrer que la série de fonctions qui définit L_α converge normalement sur [-1,+1].

En effet : ∀ n ∈ ℕ*, ∀ x ∈ [-1,+1], $\left|\frac{x^n}{n^\alpha}\right| \le \frac{1}{n^\alpha}$, et la série $\sum_{n\ge1} \frac{1}{n^\alpha}$ étant convergente, on en déduit bien la convergence normale de la série de fonctions sur [-1,+1].

Comme de plus, toutes les fonctions constituant cette série sont continue sur le segment [-1,+1], on en déduit que la somme de la série (c'est-à-dire L_α) est elle-même continue sur [-1,+1].

b. Puisque : $\forall$ x $\in$]0,1[, $x.L_2'(x) = L_1(x)$, on en déduit que : $L_2'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$, et : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} L_2'(x) = +\infty$.

Dans ce cas, puisque L_2' a une limite infinie en 1, L_2 n'est pas dérivable en 1.

On sait même que : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{L_2(x) - L_2(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} L_2'(x) = +\infty$.

2. a. L'application φ est définie, continue sur]0,+∞), et positive sur cet intervalle.
Puis :

- $\varphi(u) \underset{0}{\sim} \frac{u^{\alpha-1}}{u} = \frac{1}{u^{2-\alpha}}$, et comme : 2 – α < 1, cela garantit par comparaison de fonctions à valeurs positives l'intégrabilité de φ sur]0,1],
- $\varphi(u) \underset{+\infty}{\sim} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u}$, et : $u^2.\varphi(u)$, tend vers 0 en +∞, par croissances comparées, ce qui garantit l'intégrabilité de φ sur [1,+∞).

Finalement, φ est bien intégrable sur]0,+∞).

b. L'existence de $K_\alpha(x)$ a été réglée à la question précédente pour : x = 1.

De plus : $\forall$ x ≤ 1, $\forall$ u $\in$]0,+∞), $0 \le \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x} \le \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - 1}$,

donc par comparaison de fonctions à valeurs positives, $u \mapsto \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}$, est intégrable sur]0,+∞) pour tout réel : x ≤ -1.

On en déduit l'existence de $K_\alpha(x)$, pour tout x dans (-∞,1[.

c. On va utiliser un théorème garantissant cette continuité.

Pour cela, on pose : $\forall$ (x,u) $\in$ (-∞,1]×]0,+∞), $h(x,u) = \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - x}$, et :

- $\forall$ x $\in$ (-∞,1], u $\mapsto$ h(x,u), est continue (donc continue par morceaux) sur]0,+∞),
- $\forall$ u $\in$]0,+∞), x $\mapsto$ h(x,u), est continue sur (-∞,1],
- $\forall$ (x,u) $\in$ (-∞,1]×]0,+∞), $|h(x,u)| \le \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - 1} = \varphi(u)$, et on a montré que φ était définie, continue et intégrable sur]0,+∞).

On en déduit que K_α est continue sur (-∞,1].

d. Si de plus, on suppose : α > 2, alors :

- $\forall$ x $\in$ (-∞,1], u $\mapsto$ h(x,u), est intégrable sur]0,+∞),
- h admet sur (-∞,1]×]0,+∞), une dérivée partielle : $\forall$ (x,u) $\in$ (-∞,1]×]0,+∞), $\frac{\partial h}{\partial x}(x,u) = \frac{u^{\alpha-1}}{(e^u - x)^2}$,
- $\forall$ x $\in$ (-∞,1], $u \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,u)$, est continue (donc continue par morceaux) sur]0,+∞),
- $\forall$ u $\in$]0,+∞), $x \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,u)$, est continue sur (-∞,1],
- $\forall$ (x,u) $\in$ (-∞,1]×]0,+∞), $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,u)\right| \le \frac{u^{\alpha-1}}{(e^u - 1)^2} = \psi(u)$, où ψ est définie, continue (donc continue par morceaux), intégrable sur]0,+∞).

En effet : $0 \le \psi(u) \underset{0}{\sim} \frac{u^{\alpha-1}}{u^2} = \frac{1}{u^{3-\alpha}}$, et : 3 – α < 1, puisque : 2 < α, ce qui garantit l'intégrabilité de ψ sur]0,1], son intégrabilité sur [1,+∞) découlant du même argument que dans la question II.2.a.

Donc K_α est de classe C^1 sur (-∞,1], et : $\forall$ x ≤ 1, $K_\alpha'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{(e^u - x)^2}.du$.

e. Si on reprend les points précédents, avec : α > 1, et : x $\in$ [a,b], avec : a < b < 1, alors les quatre points restent valables en remplaçant (-∞,1] par [a,b], et pour le dernier :

- $\forall$ (x,u) $\in$ [a,b]×]0,+∞), $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,u)\right| \leq \dfrac{u^{\alpha-1}}{(e^u - b)^2} = \psi(u)$, où ψ est définie, continue (donc continue par morceaux), intégrable sur]0,+∞), car : $0 \leq \psi(u) \underset{0}{\sim} \dfrac{u^{\alpha-1}}{(1-b)^2}$, et ψ tend vers 0 en 0 (puisque : α – 1 > 0).

  Donc K_α est de classe C^1 sur tout segment : [a,b] ⊂ (-∞,1[, donc sur (-∞,1[, et on obtient sa dérivée comme dans la question précédente, en dérivant sous l'intégrale.

3. a. La fonction sous l'intégrale proposée est définie, continue et positive sur]0,+∞).
   De plus :
   - $\lim\limits_{t\to 0} t^{\alpha-1}.e^{-t} = 0$, car : α > 1, et :
   - $\lim\limits_{t\to +\infty} t^2.(t^{\alpha-1}.e^{-t}) = 0$.

   Donc l'intégrale est bien convergente.
   Comme de plus la fonction sous l'intégrale est continue, positive et non nulle en 1, on déduit : $G_\alpha > 0$.

   b. On écrit simplement : $\forall$ x $\in$ [-1,+1], $\forall$ u > 0, $\dfrac{1}{e^u - x} = e^{-u}.\dfrac{1}{1 - x.e^{-u}} = e^{-u}.\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(x.e^{-u})^k$,
   car : $\left|x.e^{-u}\right| < 1$, et en utilisant une série géométrique.
   On en déduit l'égalité demandée.

   c. On a donc :
   $$\forall x \in [-1,+1],\ x.K_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} x.u^{\alpha-1}.\frac{1}{e^u - x}.du = \int_0^{+\infty} x.u^{\alpha-1}.\sum_{k=0}^{+\infty} x^k.e^{-(k+1).u}.du = \int_0^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} u^{\alpha-1}.x^{k+1}.e^{-(k+1).u}.du.$$
   Posons alors : $\forall$ u $\in$]0,+∞), $\forall$ k $\in$ ℕ, $v_k(u) = u^{\alpha-1}.x^{k+1}.e^{-(k+1).u}$.
   On constate que :
   - $\forall$ k $\in$ ℕ, v_k est définie, continue (donc continue par morceaux) sur]0,+∞) et y est intégrable car :
     $\lim\limits_{u\to 0} v_k(u) = 0$, puisque : α > 1,
     $\lim\limits_{u\to +\infty} u^2.v_k(u) = 0$, du fait du théorème des croissances comparées,
   - la série de fonctions $\sum\limits_{k\geq 0} v_k$ converge simplement sur]0,+∞) vers S : $u \mapsto \dfrac{x.u^{\alpha-1}}{e^u - x}$,
   - S est continue (donc continue par morceaux) sur]0,+∞),
   - la série $\sum\limits_{k\geq 0}\int_0^{+\infty}|v_k|$ converge car :
     $$\forall k \in \mathbb{N},\ \int_0^{+\infty}|v_k| = |x|^{k+1}.\int_0^{+\infty} u^{\alpha-1}.e^{-(k+1).u}.du = \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)^\alpha}.\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}.e^{-t}.dt = \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)^\alpha}.G_\alpha \leq \frac{G_\alpha}{(k+1)^\alpha},$$
     en utilisant le changement de variable : $t = (k+1).u$, qui est croissant et C^1 sur]0,+∞).
     La série majorante est alors bien convergente d'où la convergence de $\sum\limits_{k\geq 0}\int_0^{+\infty}|v_k|$ par comparaison de séries à termes positifs.

   Finalement, on peut intervertir somme intégrale (théorème de convergence dominée) et :
   $$x.K_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u^{\alpha-1}.x^{k+1}.e^{-(k+1).u}.du = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{k+1}}{(k+1)^\alpha}.G_\alpha = G_\alpha.\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^\alpha} = G_\alpha.L_\alpha(x).$$

4. a. La fonction proposée est alors le produit de K_α et de : $x \mapsto \dfrac{x}{G_\alpha}$, qui sont toutes deux définies et continues sur (-∞,1], de classe C^1 sur (-∞,1[, donc la fonction ainsi prolongée l'est aussi.

   b. On utilise ici le changement de variable : $u = -\ln(t)$, qui est décroissant et de classe C^1 sur]0,+∞), et :
   $$\forall x \leq 1, \text{ on a : } L_\alpha(x) = \frac{x}{G_\alpha}.\int_1^0 \frac{(-\ln(t))^{\alpha-1}}{\frac{1}{t} - x}.\left(-\frac{dt}{t}\right) = \frac{x}{G_\alpha}.\int_0^1 \frac{(-\ln(t))^{\alpha-1}}{1 - x.t}.dt.$$

   c. Pour : z $\in$ ℂ –]1,+∞), la fonction sous l'intégrale est définie, continue sur]0,+∞).

En effet, l'exponentielle sur cet intervalle ne prend jamais la valeur z (puisque : $z \notin]1,+\infty)$).
De plus (pour : $z \neq 1$, cas qui a déjà été étudié), la fonction sous l'intégrale tend vers 0 en 0, et est négligeable devant $\frac{1}{u^2}$, en $+\infty$, ce qui garantit son intégrabilité sur $]0,+\infty)$ et l'existence de $L_\alpha(z)$.
Enfin, pour : $z \in \mathbb{C}$, tel que : $z \notin]1,+\infty)$, $(-z) \notin]1,+\infty)$, ce qui s'écrit encore : $z^2 \notin]1,+\infty)$, alors :

$$L_\alpha(z) + L_\alpha(-z) = \frac{z}{G_\alpha}.\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u - z}.du - \frac{z}{G_\alpha}.\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{e^u + z}.du = \frac{z}{G_\alpha}.\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}.2.z}{e^{2.u} - z^2}.du,$$

et avec le changement de variable (croissante et de classe C^1 sur $]0,+\infty)$) : $t = 2.u$, on obtient :

$$L_\alpha(z) + L_\alpha(-z) = \frac{2.z^2}{G_\alpha}.\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}.2^{1-\alpha}}{e^t - z^2}.\frac{dt}{2} = 2^{1-\alpha}.\frac{z^2}{G_\alpha}.\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{e^t - z^2}.dt = 2^{1-\alpha}.L_\alpha(z^2).$$

Partie 3 : le cas : α = 2.

1. Immédiatement : $L_2(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

   Puis : $\forall$ N $\in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{2.N} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{4.k^2} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(2.k-1)^2} = \frac{1}{4}.\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} - \left(\sum_{k=1}^{2.N} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{2.N} \frac{1}{(2.k)^2}\right) = \frac{1}{4}.\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} - \frac{3}{4}.\sum_{k=1}^{2.N} \frac{1}{k^2}$,

   et en faisant tendre N vers $+\infty$: $L_2(-1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

2. a. Φ est clairement définie sur $]0,1[$, et par opérations de classe C^1 sur $]0,1[$, elle est de classe C^1 sur $]0,1[$.

   b. De plus : $\forall$ x $\in$ $]0,1[$, $\Phi'(x) = L_2'(x) - L_2'(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} = 0$, avec la question II.1.b.

   Donc Φ est constante sur $]0,1[$.
   De plus, L_2 étant continue sur [0,1], on a : $\lim_{x\to1}(L_2(x) + L_2(1-x)) = L_2(1) + L_2(0) = L_2(1)$.
   Enfin, si on pose : $x = 1-h$, alors : $\ln(x).\ln(1-x) = \ln(1-h).\ln(h) \underset{h\to0}{\sim} h.\ln(h)$, et donc par croissances comparées, on en déduit que : $\lim_{x\to1} \Phi(x) = \lim_{x\to1}(L_2(x) + L_2(1-x) + \ln(x).\ln(1-x))) = L_2(1) + 0 = L_2(1)$.
   Or Φ étant constante sur $]0,1[$, sa limite en 1 est cette valeur constante, donc $L_2(1)$.

   c. Si maintenant on calcule : $\Phi\left(\frac{1}{2}\right) = L_2\left(\frac{1}{2}\right) + L_2\left(1-\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right).\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = 2.L_2\left(\frac{1}{2}\right) + (\ln(2))^2 = L_2(1)$.

   D'où : $L_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.L_2(1) - \frac{1}{2}.(\ln(2))^2 = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}.(\ln(2))^2$.

   d. Si : x $\in$ $[-1,\frac{1}{2}]$, alors : $\frac{x}{x-1} \in [-1, \frac{1}{2}]$, et la fonction ψ : $x \mapsto L_2(x) + L_2\left(\frac{x}{x-1}\right) + \frac{1}{2}.(\ln(1-x))^2$, est définie sur cet intervalle.

   Elle y est par ailleurs continue et dérivable sur $]-1,\frac{1}{2}[$, et sa dérivée vaut :

   $$\forall x \in]-1,\tfrac{1}{2}[,\ \psi'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{1}{(x-1)^2}.\left(-\frac{x-1}{x}.\ln\left(1-\frac{x}{x-1}\right)\right) - \frac{\ln(1-x)}{1-x} = 0.$$

   Donc ψ y est constante égale à la valeur en $\frac{1}{2}$, qui vaut : $\left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}.(\ln(2))^2\right) - \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2}.(\ln(2))^2 = 0$.

   Conclusion : ψ est nulle sur $[-1, \frac{1}{2}]$, et on en déduit l'égalité demandée.

3. La question II.3 montre que : $1.K_2(1) = G_2.L_2(1)$, soit : $K_2(1) = \int_0^{+\infty} \frac{u}{e^u - 1}.du = G_2.\frac{\pi^2}{6}$.

   Comme de plus : $G_2 = \int_0^{+\infty} t.e^{-t}.dt = [-t.e^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t}.dt = 0 + [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$, on en déduit que : $K_2(1) = \frac{\pi^2}{6}$.

4. a. On a calculé que : $G_2 = 1$, donc : $\forall$ x < 0, $L_2(x) = -x.\int_0^1 \frac{\ln(s)}{1-x.s}.ds$, et on peut alors effectuer le changement de variable : $t = x.s$ (décroissant et de classe C^1 sur]0,1[), pour obtenir :

$$\forall x < 0,\ L_2(x) = -x.\int_0^x \frac{\ln\left(\frac{t}{x}\right)}{1-t}.\frac{dt}{x} = \int_x^0 \frac{\ln\left(\frac{t}{x}\right)}{1-t}.dt .$$

On effectue alors une intégration par parties sur l'intervalle [x,a], pour : x < a < 0, et :

$$\int_x^a \frac{\ln\left(\frac{t}{x}\right)}{1-t}.dt = -\left[\ln\left(\frac{t}{x}\right).\ln(1-t)\right]_x^a + \int_x^a \frac{\ln(1-t)}{t}.dt = -\ln\left(\frac{a}{x}\right).\ln(1-a) + \int_x^a \frac{\ln(1-t)}{t}.dt .$$

Or quand a tend vers 0, on a : $-\ln\left(\frac{a}{x}\right).\ln(1-a) \underset{a\to 0}{\sim} a.\ln(a)$, qui tend vers 0.

Donc : $\int_x^0 \frac{\ln\left(\frac{t}{x}\right)}{1-t}.dt = \lim_{a\to 0}\left[-\ln\left(\frac{a}{x}\right).\ln(1-a) + \int_x^a \frac{\ln(1-t)}{t}.dt\right] = 0 + \int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t}.dt = \int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t}.dt$.

On pourra effectuer un changement de variable et une intégration par parties.

b. Puisqu'on reconnaît le produit d'un logarithme et de sa dérivée, on a :

$$\forall x < 0,\ g(x) = \left[\frac{1}{2}.(\ln(1-t))^2\right]_x^0 = -\frac{1}{2}.(\ln(1-x))^2 .$$

c. La fonction sous l'intégrale est définie, continue sur (-∞,0[et elle y reste positive.

De plus : $\frac{\ln(1-t)}{t.(t-1)} \underset{0}{\sim} \frac{-t}{t.(t-1)} = \frac{1}{1-t}$, et : $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1-t)}{t.(t-1)} = 1$,

autrement dit cette fonction est prolongeable par continuité en 0.

De plus : $\lim_{t\to -\infty} |t|^{\frac{3}{2}}.\frac{\ln(1-t)}{t.(t-1)} = 0$, du fait du théorème des croissances comparées.

Donc l'intégrale est convergente et A existe.

d. Vu l'expression de g(x), on a immédiatement : $\lim_{x\to -\infty} g(x) = -\infty$.

De plus : $\forall$ x < 0, $L_2(x) - g(x) = \int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t}.dt - \int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t-1}.dt = -\int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t.(t-1)}.dt$.

Et comme l'intégrale A est convergente, on en déduit que : $\lim_{x\to -\infty} (L_2(x) - g(x)) = -A$.

Donc, g prenant des valeurs strictement négatives sur (-∞,0[, on en déduit que :

$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{L_2(x) - g(x)}{g(x)}\right) = 0$, et : $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{L_2(x)}{g(x)}\right) = 1$, soit : $L_2(x) \underset{-\infty}{\sim} g(x) \underset{-\infty}{\sim} -\frac{(\ln(-x))^2}{2}$.