Corrigé du Devoir Surveillé n°04 (version 1).

Problème (CCP PC 2013).

Partie 1 : étude dans un cas particulier.

1. a. Le polynôme caractéristique donne les valeurs propres de A se calcule classiquement :

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^3.\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2).\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2).(\lambda-1)^2,$$

d'où : Sp(A) = {-2,1}, avec 1 valeur propre double.

b. On calcule le déterminant de cette famille dans la base canonique et : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, et $\mathscr{F}$ forme bien une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Puis : $A.u_1 = u_1$, $A.u_2 = u_2$, et : $A.u_3 = -2.u_3$, et u_1, u_2, u_3 sont bien des vecteurs propres de A

c. On vient ainsi de montrer que A est diagonalisable (base de vecteurs propres dans $\mathbb{R}^3$ pour l'endomorphisme canoniquement associé à A).

d. On constate que : $B.u_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B.u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, et : $B.u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, d'où la réponse à la question.

2. a. On calcule de même : $\chi_B(\lambda) = -\begin{vmatrix} 3-\lambda & -3 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)^3$, et 2 est valeur propre triple de B.

b. Puis : $(B-2.I) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, et les trois colonnes étant proportionnelles à u_4 : $\mathrm{Im}(B) = Vect(u_4)$.

Avec le théorème du rang que : $\dim(E_2(B)) = \dim(\ker(B-2.I)) = 2$.

c. B n'est donc pas diagonalisable puisque $\dim(E_2(B)) \neq 3 = mult(2)$.

3. a. On commence par déterminer les deux sous-espaces propres :

- pour $E_1(A)$, on résout le système : $A.X = 1.X$, ce qui donne : $E_1(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$,

soit le plan d'équation : $x + y + z = 0$,

- pour $E_2(B)$, on résout le système : $B.X = 2.X$, ce qui donne : $E_2(B) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$,

soit le plan d'équation : $x - 3.y - z = 0$.

On constate alors que : $E_1(A) \cap E_2(B) = Vect(u_5)$.

b. S'il y a des vecteurs propres communs à A et B, ils sont :

- dans $E_1(A) \cap E_2(B)$, ce qui donne $Vect(u_5)$,
- ou dans $E_{-2}(A) \cap E_2(B)$.

Or $E_{-2}(A)$ est de dimension 1 (valeur propre simple) et : $u_5 \in E_{-2}(A)$, donc : $E_{-2}(A) = Vect(u_5)$.

Et comme : $u_5 \notin E_2(B)$, $E_{-2}(A) \cap E_2(B) = \{0\}$.

Donc les vecteurs propres communs à A et B sont les vecteurs non nuls, colinéaires à u_5.

4. a. Il suffit de calculer.

b. On y va : $\chi_C(\lambda)=(-1)^3.\begin{vmatrix}-5-\lambda & 3 & -1\\ -2 & 6-\lambda & 2\\ -5 & 3 & -1-\lambda\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}-6-\lambda & 3 & -1\\ 0 & 6-\lambda & 2\\ -6-\lambda & 3 & -1-\lambda\end{vmatrix} = (6+\lambda).\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & 6-\lambda & 2\\ 0 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}$,

et donc : $\chi_C(\lambda)=\lambda.(\lambda+6).(\lambda-6)$, soit : Sp(C) = {0,-6,6}.

C est donc diagonalisable (trois valeurs propres distinctes) et est semblable à D.

Puisque C et D ont même rang, on termine avec : $rg(C)=rg(D)=2$.

Partie 2 : condition nécessaire et conditions suffisantes.

1. a. Il est immédiat que : ∃ (λ,μ) ∈ ℝ², $A.e=\lambda.e$, et : $B.e=\mu.e$, donc :

$[A,B].e=A.B.e-B.A.e=A.\mu.e-B.\lambda.e=\mu.\lambda.e-\lambda.\mu.e=0$.

b. Puisque ker([A,B]) contient e, on a : $\dim(\ker([A,B]))\geq 1$, et : $rg([A,B])\leq n-1$, soit : $rg([A,B])<n$.

Donc : « $rg([A,B])<n$ » est une condition nécessaire pour que A et B aient un vecteur propre commun.

2. a. Toute matrice de $\mathcal{M}_n$(ℂ) a un polynôme caractéristique qui est au moins de degré 1 (car : n ≥ 1) donc admet au moins une racine dans ℂ.

b. Si : [A,B] = 0, alors A et B commutent et : ker([A,B]) = $\mathcal{M}_{n,1}$(ℝ).

De plus A admet au moins une valeur propre λ, et on constate que : E_λ(A) ⊂ ker([A,B]) = $\mathcal{M}_{n,1}$(ℝ).

A et B vérifient donc la propriété $\mathcal{H}$.

3. a. Il est clair que ψ est linéaire.

De plus :

∀ X ∈ E_λ(A), X ∈ ker([A,B]) = ker(A.B – B.A), d'après la propriété $\mathcal{H}$, et donc :

$(A.B-B.A).X=0$, soit : $A.\psi(X)=A.B.X=B.A.X=B.\lambda.X=\lambda.\psi(X)$,

ce qui permet d'en déduire que : ψ(X) ∈ E_λ(A).

Donc ψ définit bien un endomorphisme de E_λ(A).

b. Puisque : dim(E_λ(A)) ≥ 1, et que ψ est un endomorphisme de E_λ(A), ψ admet au moins une valeur propre μ et un vecteur propre associé X qui vérifient donc :

- $A.X=\lambda.X$, car : X ∈ E_λ(A),
- $\psi(X)=\mu.X$, soit : $B.X=\mu.X$.

ce qui correspond bien à un vecteur propre commun à A et à B.

4. La propriété $\mathcal{P}_1$ est vérifiée car si E est de dimension 1 de base e, deux endomorphismes φ et ψ de E auront toujours e comme vecteur propre commun.

5. a. Puisque A et B ne vérifient pas $\mathcal{H}$, on en déduit (par négation) que : ∀ μ ∈ Sp(A), E_μ(A) ⊄ ker(C).

Donc pour la valeur propre λ de A, on a : E_λ(A) ⊄ ker(C), et donc :

∃ u ∈ E_λ(A), $C.u\neq 0$, et u vérifie évidemment : $A.u=\lambda.u$.

b. Puisque : rg(C) = 1, et que : $v=C.u$ ∈ Im(C), est non nul, ce vecteur v constitue une base de Im(C).

c. On peut écrire : $v=C.u=(A.B-B.A).u=A.B.u-B.\lambda.u=(A-\lambda.I).(B.u)$ ∈ Im_λ(A).

Donc : Im(C) ⊂ Im_λ(A).

d. La question précédente prouve que : dim(Im(A – λ.I_n)) ≥ 1.

Mais : dim(E_λ(A)) = dim(ker(A – λ.I_n)) ≥ 1, puisque λ est valeur propre de A, et le théorème du rang montre alors que : dim(Im_λ(A)) ≤ n – 1.

e. On constate alors que : $[A,A-\lambda.I_n]=A.(A-\lambda.I_n)-(A-\lambda.I_n).A=A^2-\lambda.A-(A^2-\lambda.A)=0$,

et : $[B,A-\lambda.I_n]=B.(A-\lambda.I_n)-(A-\lambda.I_n).B=B.A-\lambda.B-(A.B-\lambda.B)=-(A.B-B.A)=-C$.

Puis A et (A – λ.I_n) commutant, l'image de l'un (ici Im_λ(A)) est stable par l'autre ce qui permet d'affirmer que φ définit un endomorphisme de Im_λ(A).

Enfin : ∀ Y ∈ Im_λ(A), ∃ X ∈ $\mathcal{M}_{n,1}$(**K**), $Y=(A-\lambda.I_n)X$.

On constate alors que : $B.(A-\lambda.I_n)X-(A-\lambda.I_n).B.X=-C.X$, et donc :

$\psi(Y)=B.(A-\lambda.I_n)X=(A-\lambda.I_n).B.X-C.X$ ∈ Im_λ(A),

car : $(A-\lambda.I_n).B.X$ ∈ Im_λ(A), et : $C.X$ ∈ Im_λ(A), d'après la question II.5.c.

Donc ψ laisse également stable Im_λ(A).

f. λ et ψ sont des endomorphismes du ℂ-espace vectoriel Im_λ(A) de dimension : 1 ≤ k = dim(E_λ(A)) ≤ n – 1.

De plus : ∀ Y ∈ Im([φ,ψ]), ∃ X ∈ Im_λ(A), $Y=\varphi o\psi(X)-\psi o\varphi(X)=A.B.X-B.A.X=[A,B].X$ ∈ Im([A,B]).

Donc : Im([φ,ψ]) ⊂ Im([A,B]) = Im(C), avec : rg(C) = 1, soit donc : rg([φ,ψ]) ≤ 1.
Donc il existe un vecteur propre commun (non nul dans Im_λ(A)) à φ et ψ.
Ce vecteur X vérifie alors : ∃ (α,β) ∈ $\mathbf{K}^2$, $\varphi(X) = A.X = \alpha.X$, et : $\psi(X) = B.X = \beta.X$, et X est aussi vecteur propre commun à A et B.

6. a. Attention, il faut terminer proprement la récurrence.
La propriété $\mathscr{P}_1$ est vérifiée.
De plus, si on suppose $\mathscr{P}_k$ vraie pour : 1 ≤ k ≤ n – 1, et si A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (ou deux endomorphismes d'un ℂ-espace vectoriel de dimension n), alors :
   - si A et B vérifient la propriété $\mathscr{H}$, elles ont un vecteur propre en commun (question II.3),
   - si A et B ne vérifient pas la propriété $\mathscr{H}$, elles ont un vecteur propre en commun (question II.5),

   ce qui montre que $\mathscr{P}_n$ est vraie et ce qui termine la récurrence.

   b. La condition « $rg([\varphi,\psi]) \leq 1$ » est donc suffisante pour que φ et ψ aient un vecteur propre commun et la même condition est valable pour les matrices.

Partie 3 : étude d'un autre cas particulier.

1. C'est immédiat en réindexant : $g(P) = X^{2.n}.\sum_{k=0}^{2.n} a_k.\frac{1}{X^k} = \sum_{k=0}^{2.n} a_k.X^{2.n-k} = \sum_{j=0}^{2.n} a_{2.n-j}.X^j$, avec : $k = 2.n - j$.
2. f et g sont clairement linéaires.
Par ailleurs il est également immédiat (pour f) que : ∀ P ∈ E, $f(P)$ ∈ E, et l'expression trouvée à la question III.1 montre que c'est encore vrai pour g.
3. a. Si P est vecteur propre de g, alors : ∃ λ ∈ ℂ, $\lambda.\sum_{j=0}^{2.n} a_j.X^j = \sum_{j=0}^{2.n} a_{2.n-j}.X^j$.
De plus, P étant non nul, il existe k tel que : $a_k \neq 0$, et donc : $a_k = \lambda.a_{2.n-k}$, et : $a_{2.n-k} \neq 0$.
Or l'un des deux indices (k ou (2.n – k)) est plus grand que n, et P comporte un terme d'exposant plus grand que n.
Finalement : $\deg(P) \geq n$.
   b. Il est immédiat que : $g(X^n) = X^n$, et X^n est vecteur propre de g associé à la valeur propre 1.
4. a. C'est immédiat par exemple par récurrence :
   - ker(f) = $\mathbb{C}_0$[X], puisque : ∀ P ∈ E, ($f(P) = 0$) ⇔ ($P' = 0$) ⇔ (P ∈ $\mathbb{C}_0$[X]).
   - si pour : 1 ≤ i ≤ 2.n – 1, on a : ker(f^{i+1}) = $\mathbb{C}_{i-1}$[X], alors :
   ∀ P ∈ E, ($f^{i+1}(P) = 0$) ⇔ ($f^i(f(P)) = 0$) ⇔ ($f(P) \in \mathbb{C}_{i-1}[X]$) ⇔ ($P' \in \mathbb{C}_{i-1}[X]$) ⇔ (P ∈ $\mathbb{C}_i$[X]).

   Donc on a bien alors : ker(f^i) = $\mathbb{C}_{i+1-1}$[X], ce qui termine la récurrence.

   b. On en déduit que : ker($f^{2.n+1}$) = $\mathbb{C}_{2.n}$[X] = E, donc : $f^{2.n+1} = 0$, et $X^{2.n+1}$ est annulateur pour f.
Or une valeur propre de f est obligatoirement racine de ce polynôme annulateur et la seule valeur propre possible est 0.
De plus 1 est vecteur propre de f pour la valeur 0 : 0 est donc l'unique valeur propre de f.
On peut dire aussi que 0 **est** valeur propre de f car c'est la seule possible et un endomorphisme d'un ℂ-espace vectoriel admet **toujours** une valeur propre.
5. 0 est aussi la seule valeur propre de f^i, pour tout entier : i ∈ {1, …, 2.n} (car f^i **a obligatoirement** une valeur propre et c'est la seule possible, toujours avec un polynôme annulateur) et son seul espace propre est donc : ker(f^i) = $\mathbb{C}_{i-1}$[X].
Par conséquent, pour que f^i et g aient un vecteur propre en commun, il est nécessaire que : i ≥ n, puisque tout vecteur propre de g a un degré supérieur ou égal à n.
Réciproquement, il est suffisant d'avoir : i ≥ n, car alors X^n est vecteur propre commun à f^i et à g.
6. On commence par calculer les images des vecteurs de la base $\mathscr{B}_c$ par f et g et :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2.n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et : } B_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

7. a. Avec la question précédente on constate que A_1 et B_1 sont bien les matrices proposées, puis :

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et : } A_1^3 = 0_3.$$

b. Puis : $[A_1, B_1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, et : $[A_1^2, B_1] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, d'où : $rg([A_1, B_1]) = 2$, $rg([A_1^2, B_1]) = 2$.

c. On constate que : $rg([A_1, B_1]) < 3$, (donc la condition nécessaire de la question II.1.b est vérifiée) et pourtant A_1 et B_1 n'ont pas de vecteur propre en commun (vu la question III.5).
De même : $rg([A_1^2, B_1]) > 1$, (donc la condition suffisante de la question n'est pas vérifiée) et pourtant A_1^2 et B_1 ont un vecteur propre en commun (vu toujours la question III.5).

Partie IV : forme normale pour un vecteur propre.

1. S'il existe dans $E_\lambda(A)$ un vecteur tel que : $x_1 = 0$, alors A admet un vecteur propre associé à λ sous forme normale.
Sinon, puisque $E_\lambda(A)$ est de dimension au moins 2, on peut trouver deux vecteurs X et Y dans $E_\lambda(A)$ non colinéaires tels que : $x_1 \neq 0$, et : $y_1 \neq 0$.
Le vecteur : $Z = X - \frac{x_1}{y_1}.Y$, est alors non nul (X et Y sont non colinéaires), dans $E_\lambda(A)$ (c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$), et : $z_1 = 0$.
Donc Z est un vecteur propre de A sous forme normale associé à λ.

2. a. Puisque : $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{C})) = \frac{n.(n-1)}{2} \geq 1$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ n'est pas réduit à $\{0_n\}$.
b. Toute matrice antisymétrique a des éléments diagonaux nuls et toute colonne d'une telle matrice est donc élément de A.
c. φ et ψ sont linéaires (c'est immédiat) et : $\forall$ M $\in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$,
$^t\varphi(M) = {}^t(A.M + M.{}^tA) = -M.{}^tA + A.(-M) = {}^t(A.M + M.{}^tA) = -\varphi(M)$, soit : $\varphi(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$, et :
$^t\psi(M) = A.{}^tM.{}^tA = -A.{}^tM.{}^tA = -\psi(M)$, soit : $\psi(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.
d. Il suffit de calculer : $\forall$ M $\in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$, $\varphi \circ \psi(M) = A.(A.M.{}^tA) + (A.M.{}^tA).{}^tA = \psi \circ \varphi(M)$.

3. a. Il est clair que
   - B est antisymétrique car : $^tB = {}^t(X_1.{}^tX_2 - X_2.{}^tX_1) = X_2.{}^tX_1 - X_1.{}^tX_2 = -B$.
   - $A.B + B.{}^tA = (\lambda_1.X_1.{}^tX_2 - \lambda_2.X_2.{}^tX_1) + X_1.{}^t(A.X_2) - X_2.{}^t(A.X_1) = (\lambda_1 + \lambda_2).B$, et donc :
   $A.B + B.{}^tA = (\lambda_1.X_1.{}^tX_2 - \lambda_2.X_2.{}^tX_1) + \lambda_2.X_1.{}^tX_2 - \lambda_1.X_2.{}^tX_1 = (\lambda_1 + \lambda_2).B$.
   - $A.B.{}^tA = A.X_1.{}^t(A.X_2) - A.X_2.{}^t(A.X_1) = \lambda_1.\lambda_2.X_1.{}^tX_2 - \lambda_2.\lambda_1.X_2.{}^tX_1 = (\lambda_1.\lambda_2).B$.

   Enfin supposons : $B = 0$.
   Puisque : $X_2 \neq 0$, $\exists$ $1 \leq i \leq n$, $x_{i,2} \neq 0$, et la colonne i de la matrice B donnerait : $x_{i,2}.X_1 - x_{i,1}.X_2 = 0$, ce qui montrerait que les matrices X_1 et X_2 sont colinéaires, ce qui n'est pas possible puisque ce sont deux vecteurs propres de A associés à deux valeurs propres distinctes.
   - Donc : $B \neq 0$.

b. Il suffit d'écrire : $(A - \lambda_1.I_n).(A - \lambda_2.I_n).B = A^2.B - (\lambda_1 + \lambda_2).A.B + \lambda_1.\lambda_2.B = 0$, avec ce qui précède.
c. Si on développe le produit : $(A - \lambda_2.I_n).B = 0$, par colonnes cela s'écrit :
$(A - \lambda_2.I_n).(C_1|C_2...|C_n) = ((A - \lambda_2.I_n).C_1|(A - \lambda_2.I_n).C_2...|(A - \lambda_2.I_n).C_n) = 0$, donc :
$\forall$ $1 \leq i \leq n$, $(A - \lambda_2.I_n).C_i = 0$, soit : $C_i \in \ker(A - \lambda_2.I_n)$.
De plus B étant non nulle, l'une de ses colonnes C_k au moins est non nulle et C_k est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.
Enfin, B étant antisymétrique, toute colonne de B comporte au moins un terme nul (question IV.2.b).
Donc C_k est un vecteur propre de A sous forme normale.
d. Si maintenant : $(A - \lambda_2.I_n).B \neq 0$, l'une des colonnes C_j de cette matrice est non nulle.

Mais alors : $(A-\lambda_1.I_n).C_j = 0$, et C_j est vecteur propre de A associé à λ_1.

Mais C_j s'obtient (toujours avec un produit par blocs)avec : $C_j = (A-\lambda_2.I_n).B_j$, où B_j est la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice B et est dans $\mathcal{N}$, puisque B étant antisymétrique, toutes ses colonnes comporte un terme non nul.

Donc C_j est vecteur propre de A sous forme normale (avec la deuxième version de la définition).

4. a. Les endomorphismes de la question IV.2 vérifient : $[\varphi,\psi] = \varphi o \psi - \psi o \varphi = 0$, donc : $rg([\varphi,\psi]) = 0 \leq 1$.

   Donc φ et ψ possèdent un vecteur propre en commun (d'après la question II.6) qu'on note B.
   Alors :
   - B est antisymétrique par construction, et non nulle, puisque vecteur propre d'endomorphisme,
   - $A.B + B.{}^tA = \varphi(B) = \alpha.B$, α étant la valeur propre associée à B comme vecteur propre de φ et :
   - $A.B.{}^tA = \psi(B) = \beta.B$, β étant la valeur propre associé à B comme vecteur propre de ψ.

   b. On écrit : $(A^2 - \alpha.A + \beta.I_n).B = A^2.B - A.(A.B + B.{}^tA) + \beta.B = -A.B.{}^tA + A.B.{}^tA = 0$.

   c. Le polynôme $(X^2 - \alpha.X + \beta)$ se factorise dans $\mathbb{C}$ en : $X^2 - \alpha.X + \beta = (X-\gamma).(X-\delta)$, ce qui donne deux complexes γ et δ vérifiant l'égalité demandée.

   d. Les arguments de la question IV.3.c peuvent être repris ici pour fournir une colonne de B, vecteur propre de A sous forme normale, associé à δ.
   Comme λ est la seule valeur propre de A, on a donc : δ = λ.

   e. De même que dans la question IV.3.d, et si on note : $C = (A-\delta.I_n).B$, alors l'une des colonnes C_j de C est non nulle.
   Cette colonne s'écrit : $C_j = (A-\delta.I_n).B_j$, où B_j est sous forme normale (puisque B est antisymétrique et ses éléments diagonaux toujours non nuls).
   Enfin : $(A-\gamma.I_n).C = (A-\gamma.I_n).(A-\delta.I_n).B = 0$, d'où : $(A-\gamma.I_n).C_j = 0$, et C_j est vecteur propre de A sous forme normale.

   f. Puisque : $\delta \neq \lambda$, la matrice $(A-\delta.I_n)$ est inversible car λ est la seule valeur propre de A.
   Donc on peut multiplier l'égalité : $(A-\gamma.I_n).(A-\delta.I_n).B = 0$, par $(A-\delta.I_n)^{-1}$ et comme les matrices $(A-\gamma.I_n)$ et $(A-\delta.I_n)$ commutent, on en déduit que : $(A-\gamma.I_n).B = 0$.
   B étant non nulle, une au moins de ces colonnes est non nulle et est vecteur propre de A associé à γ (donc à λ puisque c'est toujours la seule valeur propre de A).
   Enfin, l'élément diagonal situé initialement sur la diagonale de B est non nul, et A admet à nouveau au moins un vecteur propre sous forme normale.

   g. Dans ce cas encore, A possède un vecteur propre sous forme normale.