Corrigé du Devoir Surveillé n°04 (version 1).

Exercice 1 (E3A PSI 2009).

1. Puisque A est de rang 3, son noyau est de dimension 1 et 0 est bien valeur propre de A.
2. Si on multiplie la matrice A par la matrice colonne X_1 4×1 composée de 1, on obtient : $A.X_1 = X_1$, puisque chaque coordonnée de l'image est la somme (pour chaque ligne) des éléments de A.
   Donc 1 est valeur propre de A.
3. Puisque l'on connaît maintenant une valeur propre double de A (-1) et que 0 et 1 sont racines de χ_A, polynôme de degré 4, on connaît donc toutes les racines de χ_A, et : $\chi_A = X.(X-1).(X+1)^2$.
4. On peut alors poser : ∀ k ≥ 4, $X^k = \chi_A.Q_k + R_k$, où Q_k est le quotient et R_k le reste de la division euclidienne de X^k par χ_A, avec de plus : $\deg(R_k) < \deg(\chi_A) = 4$, soit : $\deg(R_k) \leq 3$.
   On peut alors évaluer ces égalités en 0, 1 et -1, et si on note : $R_k = a_k.X^3 + b_k.X^2 + c_k.X + d_k$, alors :
   - $0 = 0.Q_k(0) + d_k$, soit : $d_k = 0$,
   - $1^k = 1 = 0.Q_k(1) + a_k + b_k + c_k$, soit : $1 = a_k + b_k + c_k$,
   - $(-1)^k = 0.Q_k(-1) - a_k + b_k - c_k$, soit : $(-1)^k = -a_k + b_k - c_k$.

   On peut alors déduire en additionnant les deux égalités la valeur de b_k, soit : $b_k = \dfrac{1+(-1)^k}{2}$.
   Enfin, on dérive l'égalité donnant la division euclidienne et : $k.X^{k-1} = \chi_A'.Q_k + \chi_A.Q_k' + R_k'$,
   puis évaluer cette égalité en -1 à nouveau (pour exploiter le fait que -1 est racine double de χ_A).
   On obtient alors : $k.(-1)^{k-1} = 0.Q_k(-1) + 0.Q_k'(-1) + 3.a_k - 2.b_k + c_k$ k, soit : $k.(-1)^{k-1} = 3.a_k - 2.b_k + c_k$.
   Comme de plus, on a toujours : $a_k + b_k + c_k = 1$, on conclut à : $2.a_k - 3.b_k = k.(-1)^{k-1} - 1$, $c_k = 1 - a_k - b_k$.
   Finalement : $R_k = \frac{1}{4}[1+(2.k-3).(-1)^{(k-1)}].X^3 + \frac{1}{2}[1+(-1)^k].X^2 + \frac{1}{4}.[1+(2.k-5).(-1)^k].X$.
5. Pour tout entier : k ≥ 4, on a : $A^k = \chi_A(A).Q_k(A) + R_k(A)$, et le théorème de Cayley-Hamilton garantit que : $\chi_A(A) = 0$, d'où :
   $$A^k = R_k(A) = \frac{1}{4}[1+(2.k-3).(-1)^{(k-1)}].A^3 + \frac{1}{2}[1+(-1)^k].A^2 + \frac{1}{4}.[1+(2.k-5).(-1)^k].A.$$

Problème (Banque PT 2012).

Question préliminaire.

Soit donc : x ∈ $E_\lambda(f)$.

On constate que : $f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda.x) = \lambda.g(x)$, et on a bien : $g(x) \in E_\lambda(f)$.

Autrement dit, $E_\lambda(f)$ est bien stable par g.

Partie 1.

1. Il est équivalent de montrer que A et B commutent.
   On vérifie immédiatement que : $A.B = B.A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, et donc f et g commutent.
2. On commence par calculer les polynômes caractéristiques :
   ∀ x ∈ ℝ, $\chi_f(x) = \chi_A(x) = (x-1)^3$, et : $\chi_g(x) = \chi_B(x) = x.(x-2)^2$.
   Puis on détermine l'espace propre de f associé à l'unique valeur propre (triple) de f :
   $$\forall\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ (A.X = X) \Leftrightarrow (y+z=0) \Leftrightarrow \left(X \in Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right).$$
   Evidemment f (et A) ne sont pas diagonalisables, car admettant une valeur propre triple, si A était diagonalisable, A serait semblable à la matrice $1.I_3$, donc égale à cette matrice ce qui n'est pas le cas.
   On peut aussi dire que l'espace propre trouvé au-dessus a une dimension différente de la multiplicité de la

valeur propre correspondante.

Pour g, on trouve de même : $E_2(g) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, et : $E_0(g) = Vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

g (et B) ne sont pas non plus diagonalisables puisque l'espace propre associé à la valeur propre double est de dimension 1.

En revanche, puisque χ_A et χ_B sont scindés sur ℝ, A et B (ainsi que f et g) sont trigonalisables sur ℝ.

3. a. On choisit donc : $e_1 = (0,-1,1)$.

   On peut choisir ensuite : $e_2 = (1,0,0)$, et le plan $Vect(e_1, e_2)$ (puisque les deux vecteurs ne sont pas colinéaires) est stable par f, puisque c'est le sous-espace propre $E_1(f)$.

   La question préliminaire garantit alors que ce plan est encore stable par g puisque f et g commutent.

   On peut remarquer qu'on aurait pu prendre : $e'_2 = \alpha.(0,-1,1)$, avec : $\alpha \neq 0$, et on aurait obtenu le même résultat.

   b. Si maintenant on choisit un troisième vecteur e_3, libre avec les deux précédents (par exemple : $e_3 = (0,1,0)$), alors la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, et :

   $f(e_1) = e_1$, et : $g(e_1) = 2.e_1$,

   $f(e_2) = \alpha.e_1 + \beta.e_2 = 1.e_2$, et : $g(e_2) = \alpha'.e_1 + \beta'.e_2 \in Vect(e_1, e_2)$, car le plan est stable,

   $f(e_3) = \gamma.e_1 + \delta.e_2 + \varepsilon.e_3$, et : $g(e_3) = \gamma'.e_1 + \delta'.e_2 + \varepsilon'.e_3$, ce qui conduit à :

   $$mat_{(e_1,e_2,e_3)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & \delta \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \text{ et : } mat_{(e_1,e_2,e_3)}(g) = \begin{pmatrix} 2 & \alpha' & \gamma' \\ 0 & \beta' & \delta' \\ 0 & 0 & \varepsilon' \end{pmatrix}.$$

   Donc la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$, les matrices de f et de g sont bien triangulaires supérieures.

Partie 2.

1. Si on choisit pour chaque valeur propre λ_k un vecteur propre associé e_k, alors la famille $(e_1, ..., e_n)$ est libre et comporte n vecteurs (soit la dimension de E) donc c'est une base de E constituée de vecteurs propres de f.

2. a. On peut écrire : $uof = P(f)of = \left(\sum_{k=0}^{d} a_k.f^k\right)of = \sum_{k=0}^{d} a_k.f^{k+1} = fo\left(\sum_{k=0}^{d} a_k.f^k\right) = foP(f) = fou$,

   et u et f commutent.

   b. On constate alors que :

   $$\forall\, i \in \mathbb{N}_n,\ u(e_i) = P(f)(e_i) = \left(\sum_{k=0}^{d} a_k.f^k\right)(e_i) = \sum_{k=0}^{d} a_k.f^k(e_i) = \sum_{k=0}^{d} a_k.\lambda_i^k.e_i = P(\lambda_i).e_i,$$

   et donc les vecteurs e_i sont vecteurs propres de u, autrement dit $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E formée de vecteurs propres de u.

   Comme de plus la matrice de u dans cette base vaut : $mat_{(e_1,...,e_n)}(u) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_b \end{pmatrix}$, avec :

   $\forall\, 1 \leq i \leq n$, , les valeurs propres de u sont ces valeurs μ_i (qui ne sont plus nécessairement distinctes).

3. a. Le polynôme caractéristique de A vaut : $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = x^5 - 1$, en développant par exemple par rapport à la première ligne.

   Donc les valeurs propres (complexes) de A sont les racines 5èmes de l'unité : $\omega_k = e^{\frac{2.i.k.\pi}{5}}$, $0 \leq k \leq 5$.

b. On constate rapidement que : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et ainsi de suite (la diagonale continue à se décaler), d'où : $B = 5.I_5 + 4.A^4 + 3.A^3 + 2.A^2 + A = P(A)$, avec : $P = 4.X^4 + 3.X^3 + 2.X^2 + X + 5$.

c. La question II.2.b montre que les valeurs propres de B sont donc : $\mu_k = P(\omega_k)$, avec : $0 \le k \le 4$.

4. a. Puisque les valeurs propres de f sont distinctes, au nombre de n, elles sont simples et chaque sous-espace propre de f est de dimension 1.

b. Pour : $i \in \mathbb{N}_n$, la question préliminaire montre que $E_{\lambda_i}(f)$ est stable par g, donc que :

$g(e_i) \in E_{\lambda_i}(f)$, autrement dit : $\exists\, \mu_i \in \mathbb{C},\ g(e_i) = \mu_i.e_i$, puisque : $E_{\lambda_i}(f) = Vect(e_i)$.

c. g est diagonalisable puisque la famille $(e_1,...,e_n)$ est encore une base de E formée de vecteurs propres de g.

d. Il est immédiat que φ est linéaire.
De plus : $\forall\, P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, $(\varphi(P) = 0) \Rightarrow (P(\lambda_1) = ... = P(\lambda_n) = 0)$.
Dans ce cas, un tel polynôme P est de degré au plus $n-1$ et admet n racines distinctes, donc : P = 0.
L'application φ est bien injective.
Comme : $\dim(\mathbb{C}_{n-1}[X]) = \dim(\mathbb{C}^n)$, l'application φ est de plus surjective, par application du théorème du rang et elle est finalement bijective.
Par conséquent $(\mu_1,...,\mu_n)$ admet un unique antécédent par φ, noté P qui vérifie donc :

$\deg(P) \le n-1$, soit : $\deg(P) < n$, et : $\forall\, i \in \mathbb{N}_n,\ P(\lambda_i) = \mu_i$.

e. Notons D la matrice de f dans la base $(e_1,...,e_n)$ et Δ celle de g dans cette même base.

Alors : $\Delta = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P(\lambda_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} a_k.\lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{n-1} a_k.\lambda_n^k \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k.\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$,

et donc : $\Delta = \sum_{k=0}^{n-1} a_k.D^k = P(D)$, d'où on déduit que : $P(f) = g$.

5. a. Le polynôme caractéristique de M est : $\chi_M(x) = \begin{vmatrix} \frac{5}{2} - x & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} - x \end{vmatrix} = x^2 - 5.x + 4 = (x-1).(x-4)$, et M est diagonalisable puisqu'elle admet deux valeurs propres disctinctes.

De plus, on calcule immédiatement : $E_1(M) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, et : $E_4(M) = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, donc en posant :

$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a : $Q^{-1}.M.Q = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

b. Si N répond au problème, alors : $N.M = N.N^2 = N^2.N = M.N$, et N et M commutent.
Donc d'après la question II.4.c, N est diagonalisable par l'intermédiaire de la même matrice Q et la question II.4.e montre que N est un polynôme en M de degré strictement plus petit que 2, soit :

- $Q^{-1}.N.Q$ est diagonale,
- il existe deux réels α et β tels que : $N = \alpha.I_2 + \beta.M$.

c. Si on pose : $Q^{-1}.N.Q = \Delta$, alors : $N^2 = M$, devient : $\Delta^2 = D$, et : $\Delta = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 2.\varepsilon_2 \end{pmatrix}$, avec : $\varepsilon_i = \pm 1$, soit 4 solutions pour N données par : $N = Q.\Delta.Q^{-1}$.

Et comme on sait que : $\exists\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ N = \alpha.I_2 + \beta.M$, cela revient à trouver α et β tels que :

$\Delta = \alpha.I_2 + \beta.D$, ce qui après résolution des quatre systèmes fournit les expressions :

$N_1 = \frac{2}{3}.I_2 + \frac{1}{3}.M$, $N_2 = -\frac{2}{3}.I_2 - \frac{1}{3}.M$, $N_1 = -2.I_2 + M$, et : $N_1 = 2.I_2 - M$.

<u>Exercice 2 (EDHEC option scientifique 2006 extrait).</u>

1. a. Il suffit de calculer : $(f - \lambda_1.Id) - (f - \lambda_2.Id) = (\lambda_2 - \lambda_1).Id$, d'où le résultat.

   b. Montrons cela en deux points.

   • la somme est directe.

   En effet, si : $x \in \ker(f - \lambda_1.Id) \cap \ker(f - \lambda_2.Id)$, alors : $f(x) = \lambda_1.x = \lambda_2.x$, d'où : $(\lambda_2 - \lambda_1).x = 0$, et comme les deux valeurs sont distinctes, on en déduit que : $x = 0$.

   • la somme vaut $\mathbb{C}^m$.

   Il est clair évidemment que la somme est incluse dans $\mathbb{C}^m$, et réciproquement, si on considère un élément x de $\mathbb{C}^m$, alors : $x = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}.(f(x) - \lambda_1.x) + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}.(f(x) - \lambda_2.x)$, d'après ce qui précède.

   Or si on note x_1 et x_2 les vecteurs qui compose cette somme, alors :

   $(f - \lambda_2.Id)(x_1) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}.(f - \lambda_2.Id)o(f - \lambda_1.Id)(x) = 0$, par exemple en développant, et de même :

   $(f - \lambda_1.Id)(x_2) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}.(f - \lambda_1.Id)o(f - \lambda_2.Id)(x) = 0$.

   Donc : $x_1 \in \ker(f - \lambda_2.Id)$, et : $x_2 \in \ker(f - \lambda_1.Id)$, ce qui donne le résultat attendu.

   On aurait aussi pu raisonner par analyse-synthèse.

   c. Si on rassemble une base de chacun de ces deux sous-espaces de $\mathbb{C}^m$, on obtient alors une base de $\mathbb{C}^m$ dans laquelle la matrice est diagonale car ses vecteurs y vérifient : $f(y) = \lambda_1.y$, ou : $f(y) = \lambda_2.y$.

2. La matrice A de $\mathcal{M}_{2.n+1}(\mathbb{C})$ diagonale égale à : $A = i.I_{2.n+1}$, répond à la question.

3. a. f vérifie : $(f - i.Id) - (f + i.Id) = \theta$.

   Donc il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale (et vaut D) et si on note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^{2.n+1}$ à $\mathcal{B}$, on a : $D = P^{-1}A.P$.

   Les termes diagonaux de D sont précisés à la question 1.c, et valent donc $\pm i$.

   Enfin, il ne peut y avoir que des i (ou que des –i), car alors on aurait : $D = \pm i.I_{2.n+1}$, et la matrice A vaudrait : $A = P.D.P^{-1} = \pm i.I_{2.n+1}$, et ne serait pas une matrice réelle.

   b. Pour : $x \in E_i$, on a : $f(x) = i.x$, ce qui matriciellement s'écrit : $A.X = i.X$.

   Mais en développant ce produit, on constate que : $\overline{A.X} = \overline{i.X}$, donc : $\overline{A}.\overline{X} = A.\overline{X} = -i.\overline{X}$, puisque A est à coefficients réels.

   Donc : $\overline{x} \in E_{-i}$.

   L'implication réciproque est immédiate et se démontre de la même façon.

   c. Il y a donc deux choses à montrer : que la famille proposée est dans E_{-i} et qu'elle est libre.

   La question 3.b montre qu'elle est bien dans E_{-i}, et pour ce qui est de sa liberté :

   $\forall\ (\mu_1, \ldots, \mu_p) \in \mathbb{C}^p,\ (\mu_1.\overline{u_1} + \ldots + \mu_p.\overline{u_p} = 0) \Rightarrow (\overline{\overline{\mu_1}.u_1 + \ldots + \overline{\mu_p}.u_p} = 0)$.

   Donc : $\overline{\mu_1}.u_1 + \ldots + \overline{\mu_p}.u_p = 0$, et tous les $\overline{\mu_k}$ sont nuls, donc les μ_k aussi.

   On en déduit ainsi que : $\dim(E_{-i}) \geq \dim(E_i)$, puisque E_{-i} contient une famille libre comportant $\dim(E_i)$ éléments.

   Mais comme il est immédiat que l'implication reste vraie si on intervertit les rôles de E_i et de E_{-i}, on a aussi : $\dim(E_i) \geq \dim(E_{-i})$, et finalement : $\dim(E_i) = \dim(E_{-i})$.

   d. Comme enfin : $\dim(\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C})) = \dim(E_i) + \dim(E_{-i})$, puisque : $\mathcal{M}_{2n+1,1}(\mathbb{C}) = E_i \oplus E_{-i}$, on aurait : $2.n + 1 = \dim(E_i)$, ce qui est faux.

   Conclusion : il n'existe pas de matrice A dans $\mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ vérifiant : $A^2 = -I_{2.n+1}$.