SPE PSI DEVOIR SURVEILLE N°3 Le 21/11/11

Durée : 4h.

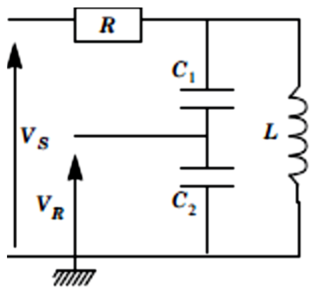
Le problème IV est réservé aux volontaires candidats mines-ponts.

I/ Oscillateur électronique de Colpitts :

On étudie le montage ci-dessous constitué de résistances R, R_1 et R_2 (variable), d'une inductance L et de deux condensateurs de capacités C_1 et C_2. On posera $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$.

L'amplificateur opérationnel est supposé idéal.

1/ Montrer que la fonction de transfert $\underline{\beta}(j\omega) = \frac{\underline{V_R}(j\omega)}{\underline{V_S}(j\omega)}$ s'écrit sous la forme $\underline{\beta}(j\omega) = \frac{\beta_o}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}\right)}$.



Identifier la pulsation centrale ω_o et le facteur de qualité Q en fonction de C, C_2, L et R.

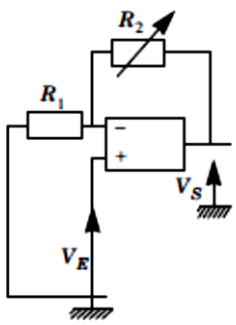
Préciser la nature et l'ordre de ce filtre.

2/ Données : R = 1,0 kΩ, L = 10 mH, C_2 = 47 nF et C_1 = 100 nF.

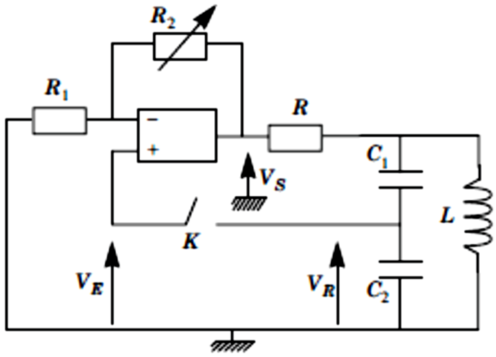
Calculer le facteur de qualité Q et la fréquence centrale associée à ω_o.

Tracer l'allure du diagramme de Bode en gain et en phase.

3/ Déterminer la fonction de transfert $\underline{\alpha}(j\omega) = \frac{\underline{V_S}(j\omega)}{\underline{V_E}(j\omega)}$.



4/ On associe les deux circuits précédents et l'interrupteur K est maintenu ouvert.



Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{V_R}(j\omega)}{\underline{V_E}(j\omega)}$.

5/ L'interrupteur K est finalement fermé. A quelle condition sur R_2 en fonction de R_1, C_1 et C_2, peut-il y avoir des oscillations ?

Quelle est alors la fréquence de ces oscillations ?

Calculer R_2 pour $R_1 = 10$ kΩ ?

6/ Déterminer une équation différentielle en v_E et retrouver les résultats de la question précédente.

7/ Quel phénomène est à l'origine de ces oscillations ? Quelle inégalité faut-il vérifier pour R_2 ? Que peut-on dire alors d'un point de vue mathématique de la solution de l'équation différentielle ?

8/ Dessiner en fonction du temps l'allure de la tension de sortie de l'AO. Quel phénomène physique limite l'amplitude des oscillations ?

II/ Capteur de température:

Pour effectuer une mesure de température, on utilise un résistor dont la résistance varie avec la température T du milieu dans lequel on le plonge suivant la loi $R(T) = R(T_o) + \alpha\,(T - T_o)$ où T_o est une température de référence et α une constante.

1/ Ce résistor est inséré dans un montage en pont de Wheatstone, comme indiqué ci-dessous :

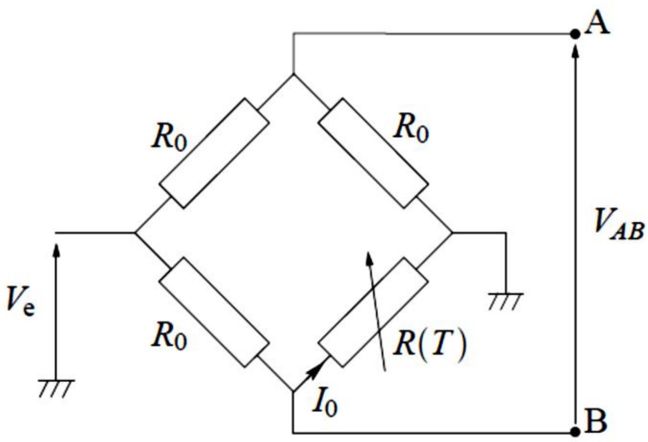


Figure 1

Exprimer V_{AB} en fonction de R(T), R_o et V_e.

2/ Le signal V_{AB} est ensuite amplifié par le dispositif représenté ci-dessous (figure 2)

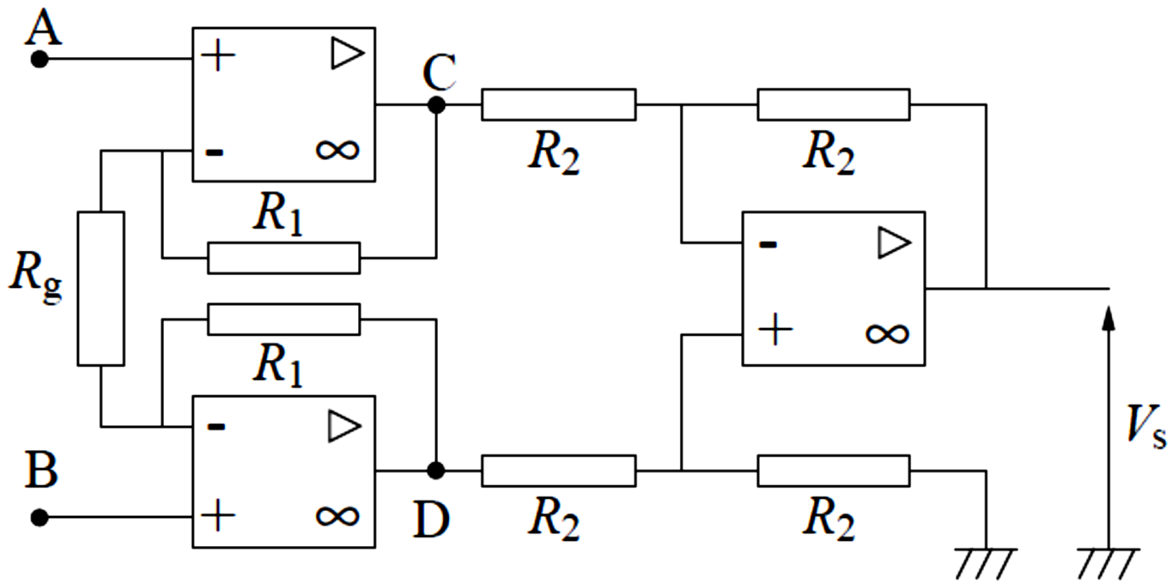


Figure 2

Les amplificateurs opérationnels du circuit sont considérés comme idéaux et les conditions sont telles qu'ils fonctionnent en régime linéaire.

2/ Exprimer V_S en fonction de V_C et V_D. Quelle est la fonction de la partie du circuit située à droite des nœuds C et D ?

3/ Exprimer V_S en fonction de V_{AB} puis de V_e.

4/ Comment choisir R_o pour que le signal de sortie soit nul pour $T = T_o$?

5/ En supposant que la température T reste telle que $\alpha (T - T_o) << R(T_o)$, exprimer $V_S(T)$ en fonction de T, T_o, R_1, R_g, et α. Commenter.

III/ Propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide :

Opérateurs mathématiques en coordonnées cartésiennes dans le repère cartésien orthonormé direct $(O,\ \vec{e}_x,\ \vec{e}_y,\ \vec{e}_z)$.

Divergence : $$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Rotationnel : $$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

Laplacien d'un champ scalaire : $$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Laplacien d'un champ vectoriel : $$\Delta\vec{A} = \left| \begin{array}{l} \Delta A_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \Delta A_y = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \Delta A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{array} \right.$$

Relations concernant les opérateurs mathématiques :

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{Z}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\ \vec{Z}\right) - \Delta\vec{Z}$$

$$\Delta U = div\left(\overrightarrow{grad}\,U\right)$$

Trigonométrie :

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$$

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Dans l'ensemble du problème, on se place dans l'espace rapporté à un repère cartésien orthonormé direct $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.
On désignera par ε_0 la permittivité diélectrique du vide et par μ_0 la perméabilité magnétique du vide.

Première partie : Propagation dans le vide

1 – Rappeler l'expression des équations de Maxwell dans un milieu non chargé, non conducteur et assimilable au vide.
Déduire des équations de Maxwell les équations de propagation vérifiées dans un milieu non chargé, non conducteur et assimilable au vide par le champ électrique $\vec{E}$ et par le champ magnétique $\vec{B}$.

2 – Expliquer ce qu'est une onde plane.

3 – On considère une onde électromagnétique pour laquelle l'expression du champ électrique est donnée en coordonnées cartésiennes par la formule : $\vec{E} = E_o \cos[\omega(t - \frac{z}{c})]\vec{e_x}$ où E_o est une constante positive, ω est la pulsation de l'onde (constante), c la célérité de la lumière dans le vide et t le temps.

3.1 – Montrer que l'expression précédente du champ électrique correspond bien à celle d'une onde plane dont on précisera la direction et le sens de propagation.
Montrer que cette onde vérifie l'équation de propagation déterminée à la question 1 à condition que c, ε_0 et μ_0 soient reliés par une relation que l'on déterminera.

3.2 – En exploitant le fait que cette onde est plane ou en utilisant une des équations de Maxwell rappelée dans la question 1, déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ de cette onde en fonction de E_o, c, ω, z, t et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

4.1 – Donner l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ associé à une onde électromagnétique ($\vec{E}, \vec{B}$). Quelle est la signification physique de ce vecteur ? Quelle est l'unité du système international qui lui correspond ?

4.2 – Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ relatif à l'onde plane considérée. On exprimera $\vec{\Pi}$ en fonction de t, c, E_o, ε_0, z, ω et d'un vecteur unitaire que l'on précisera. Déterminer la valeur moyenne $\langle\vec{\Pi}\rangle$ au cours du temps. On exprimera $\langle\vec{\Pi}\rangle$ en fonction de c, E_o, ε_0 et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

5 – L'onde arrive sur une cellule détectrice placée perpendiculairement à la direction de propagation de l'onde. Soit P la puissance moyenne reçue par la cellule détectrice de surface S. Déterminer l'expression de E_0 en fonction de ε_0, c, P et S.

6 – Comment doit-on placer une antenne filaire (segment métallique) pour détecter le champ électrique ? Justifier clairement votre raisonnement.

7/ L'onde est détectée par un cadre conducteur rectiligne formant un cadre de côté a, fermé sur un voltmètre et placé dans le plan xOz comme indiqué sur la figure ci-dessous (figure a). Le cadre est arbitrairement orienté comme représenté sur la figure a, de sorte que la normale $\vec{N}$ au cadre soit colinéaire à $\overrightarrow{e_y}$.

Le centre du cadre est à l'abscisse $z_o + \frac{a}{2}$ et les brins verticaux aux abscisses z_o et $z_o + a$.

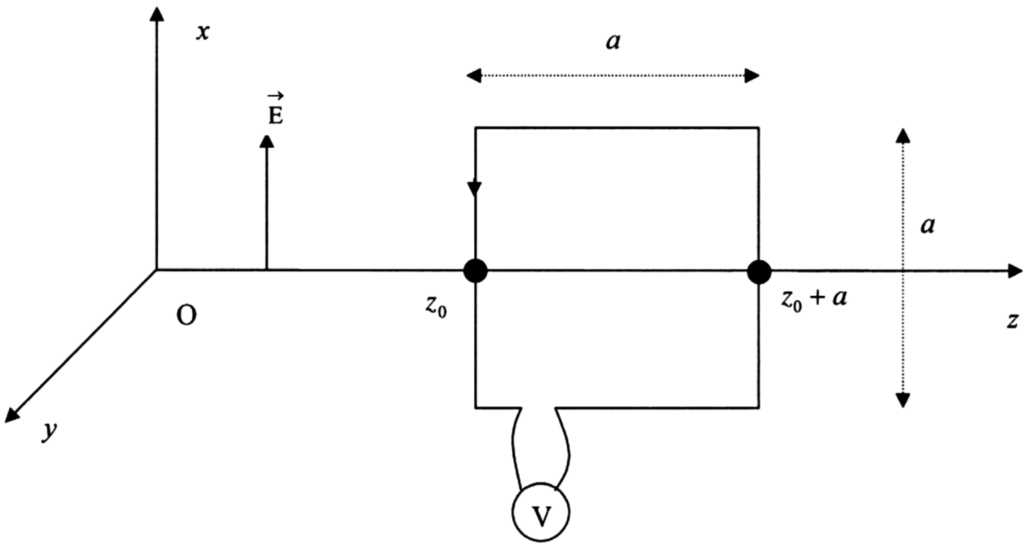


Figure a

On se place dans le cas où la longueur a du cadre est telle que le champ magnétique ne peut pas être considéré comme uniforme sur la surface du cadre.

71/ Calculer le flux Φ du champ magnétique à travers le cadre à un instant t en fonction de t, c, E_o, ω, z_o et a.

72/ Le voltmètre mesure alors une tension e(t), appelée fem induite aux bornes du cadre, et donnée par la relation $= -\frac{d\Phi}{dt}$.

Calculer e(t) en fonction de a, E_o, ω, z_o, c et t.

73/ Calculer la valeur efficace U_{eff} de e(t).

8/ La valeur de a étant connue, montrer qu'il existe des valeurs ω_{max} de ω pour lesquelles l'amplitude de la fem induite est maximale et d'autres valeurs ω_{min} pour lesquelles elle est nulle. Déterminer ω_{max} et ω_{min} en fonction de c et a.

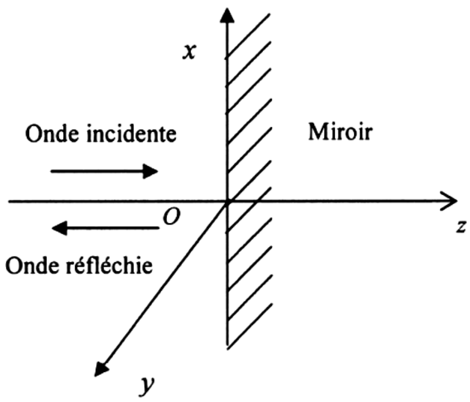
Deuxième partie : Réflexion sur un miroir métallique parfaitement conducteur

Une onde électromagnétique à polarisation rectiligne se propage dans le vide dans la direction (Oz), dans le sens des z croissants.

Le champ électrique de l'onde est donné par l'expression : $\vec{E_i} = E_0 \cos[\omega(t - \frac{z}{c})]\vec{e_x}$ où E_0 est une constante positive, ω est la pulsation de l'onde (constante), c la célérité de la lumière dans le vide et t le temps.

En $z = 0$, l'onde arrive sur la surface plane d'un miroir métallique parfaitement conducteur et ne comportant initialement aucune charge électrique. Le miroir occupe le plan xOy. On admet que les champs électrique et magnétique sont nuls à l'intérieur du miroir.

On admet que l'onde incidente donne naissance à une onde réfléchie $\vec{E_r} = E_{0r} \cos[\omega(t + \frac{z}{c})]\vec{e_x}$ se propageant dans le sens des z décroissants.



On admet également que les champs électrique et magnétique résultants doivent ici être continus en z = 0.

91/ Donc en particulier, le champ électrique total doit être nul en z = 0.

En déduire E_{or} en fonction de E_o.

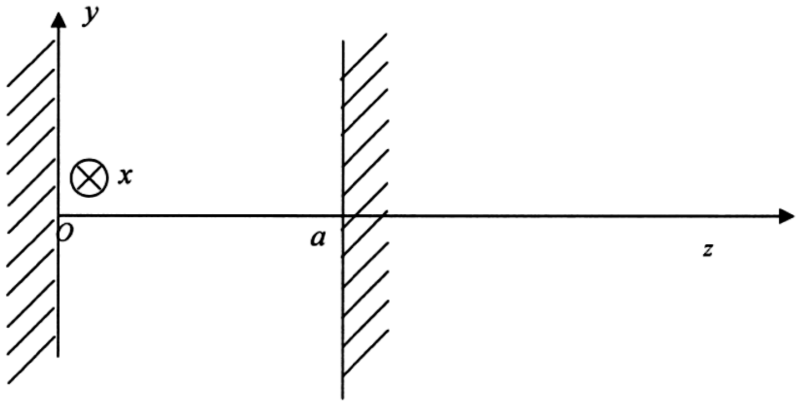
9.2 – En déduire l'expression du champ électrique $\vec{E}_{total}$ résultant de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie dans le demi-espace $z < 0$. On exprimera $\vec{E}_{total}$ en fonction de ω, c, t, z, E_0 et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

Caractériser l'onde résultante.

10 – En utilisant les équations de Maxwell ou les propriétés des ondes électromagnétiques planes, déterminer le champ magnétique incident $\vec{B_i}$, puis le champ magnétique réfléchi $\vec{B_r}$. En déduire le champ magnétique $\vec{B}_{total}$ résultant de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie dans le demi-espace $z < 0$. On exprimera $\vec{B_i}$, $\vec{B_r}$ et $\vec{B}_{total}$ en fonction de ω, c, t, z, E_0 et de vecteurs unitaires que l'on précisera.

11 – Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ de l'onde résultante ainsi que sa valeur moyenne $\langle\vec{\Pi}\rangle$. Commenter.

Troisième partie : Onde stationnaire entre deux plans parallèles parfaitement conducteurs



On étudie une onde électromagnétique, stationnaire, plane, monochromatique, à polarisation rectiligne entre deux plans métalliques parfaitement conducteurs, parallèles, d'équations respectives $z = 0$ et $z = a$.
Le champ électrique de l'onde considérée s'écrit sous la forme $\vec{E} = E_0 f(z)\cos(\omega t)\vec{e}_x$ où E_0 est une constante positive, *f(z)* est une fonction qui ne dépend que de *z*, ω est la pulsation de l'onde (constante) et *t* le temps.

12 – Justifier le fait que l'onde ainsi étudiée est une onde plane et stationnaire.

13 – On admet que les champs électrique et magnétique $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls dans un métal parfaitement conducteur. En utilisant les conditions aux limites que doit vérifier le champ $\vec{E}$ (données à la question 9.1 de la partie précédente), déterminer les valeurs limites $f(0+)$ et $f(a-)$ de la fonction *f(z)* quand *z* tend vers 0 par valeurs supérieures et quand *z* tend vers *a* par valeurs inférieures.

14 – En sachant que le champ électrique $\vec{E} = E_0 f(z)\cos(\omega t)\vec{e}_x$ vérifie l'équation de propagation déterminée dans la première partie, déterminer l'équation différentielle du second ordre vérifiée par la fonction *f(z)*.

15 – Par intégration de l'équation différentielle précédente et en prenant en compte les conditions aux limites obtenues dans la question 13, déterminer, à une constante multiplicative près, la fonction *f(z)* en fonction de ω, *z*, *c*.
En déduire que la pulsation ω ne peut prendre que des valeurs discrètes que l'on déterminera en fonction de *c* et *a*.

IV/ Principe d'un altimètre:

Le principe général d'un altimètre est très simple. Il est décrit sur la figure A. Un oscillateur embarqué dans l'avion émet un signal sinusoïdal s(t) modulé en fréquence. Ce signal se propage à la vitesse c = 3,00.10^{8} m.s^{-1}. Il ne sera pas tenu compte du déphasage pouvant être introduit par la réflexion au sol, ni de l'effet Doppler.

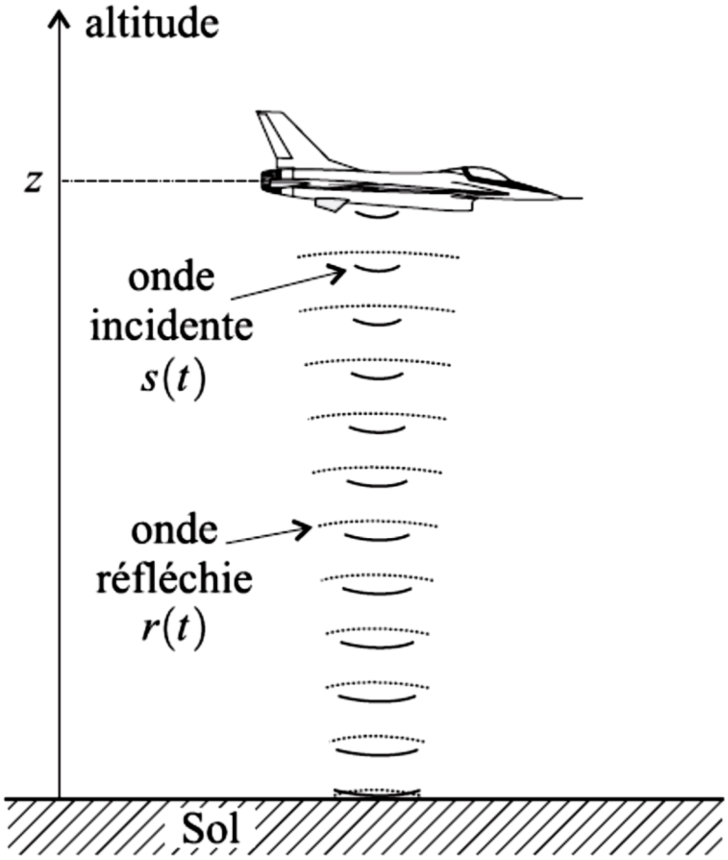


Figure A.

Une antenne fixée sur l'avion permet à l'altimètre de mesurer son altitude à partir du temps mis par l'onde radioélectrique pour effectuer l'aller-retour entre le sol et l'avion. La fréquence $f_s(t)$ du signal s(t) émis par l'oscillateur de l'altimètre varie périodiquement au cours du temps selon le graphe de la figure B.

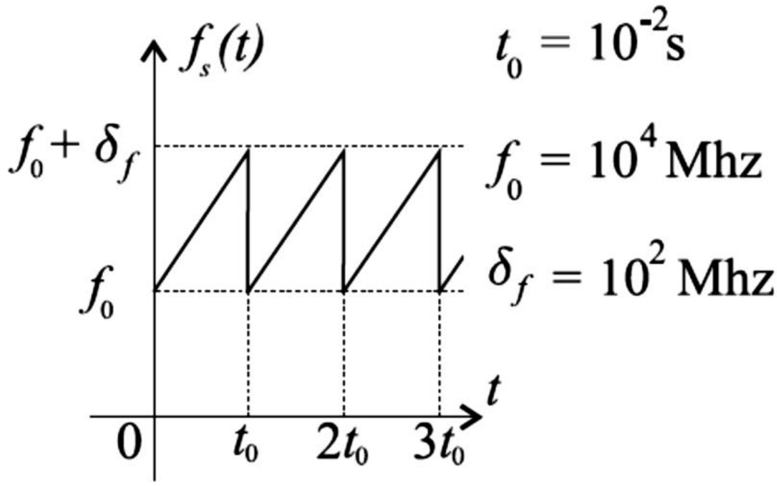


Figure B

1/ A partir du graphe de la figure B, établir la loi de variation de la fréquence $f_s(t)$ sur une période, en fonction de t, f_o, δ_f et t_o.

La quantité $f_s(t)$ est en fait la fréquence instantanée du signal s(t) émis par l'altimètre. Cela signifie ici que s(t) = A cos θ(t) avec $f_s(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt}$.

2/ Sachant que s(0) = A, déterminer l'expression de s(t) en fonction de A, t, $\omega_o = 2\pi f_o$ et $\omega_1 = \frac{\delta_f}{2f_o t_o}$.

Tracer l'allure du graphe s(t) sur une période.

On admet que le signal réfléchi par le sol puis capté par l'antenne de l'altimètre peut se mettre sous la forme r(t) = a s(t-τ) où le paramètre τ est positif et homogène à un temps.

3/ Après avoir donné la signification physique des paramètres a et τ, déterminer l'expression de τ en fonction de l'altitude z de l'avion et de la vitesse de propagation c de l'onde radioélectrique qu'il émet. Quelle est la valeur numérique de τ si l'altitude de l'avion est z = 3000 m ?

4/ Le fonctionnement de l'altimètre peut être décrit par le schéma bloc de la figure C. On admet que $\delta_f << f_o$ et $\tau << t_o$.

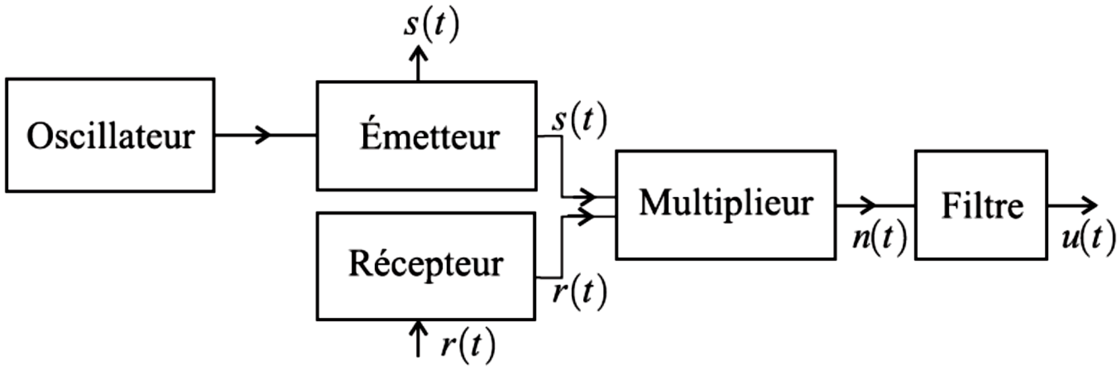


Figure C

Montrer que le signal de sortie du multiplieur n(t) peut s'écrire comme la somme de deux signaux sinusoïdaux dont l'un possède une fréquence instantanée f_1 qui ne dépend pas de t et l'autre une fréquence instantanée $f_2(t)$ qui varie avec t. On donnera l'expression de ces deux fréquences en fonction de τ, δ_f et t_o dans le cas de f_1 et de t, τ, δ_f, t_o et f_o dans le cas de f_2.

5/ Pour les avions standards on a toujours τ ≤ 100 μs. Quel type de filtre doit on utiliser et comment calibrer ce dernier pour obtenir un signal de sortie u(t) permettant de déterminer facilement la valeur de l'altitude z de l'avion ?

6/

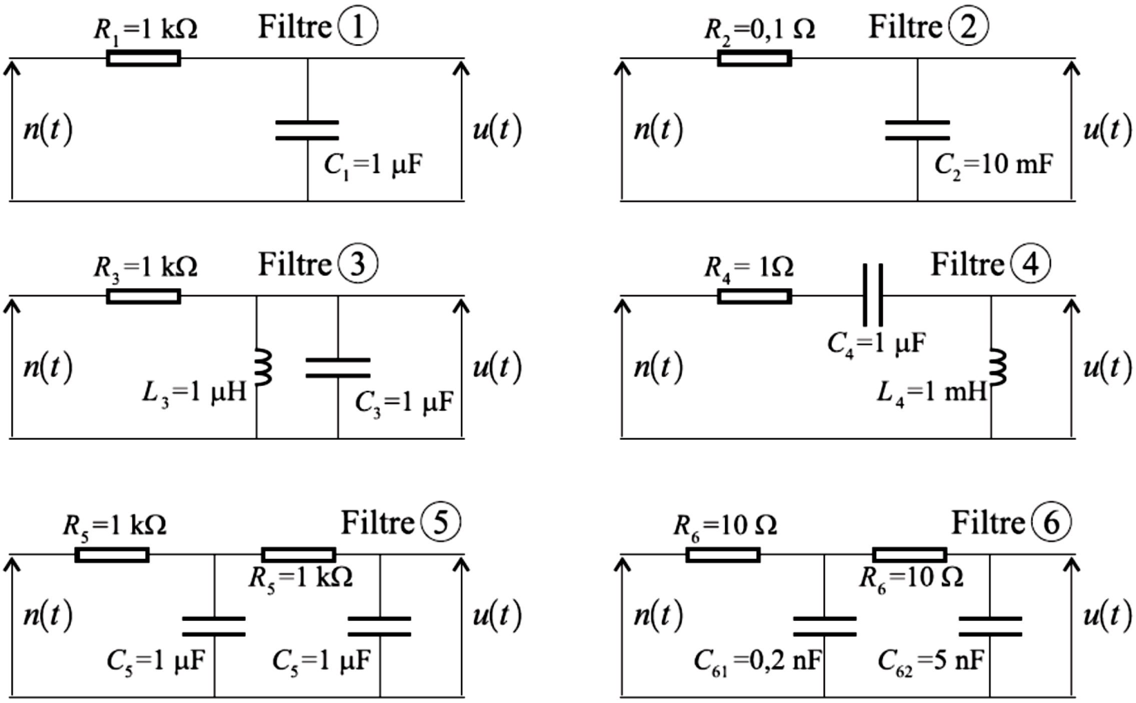


Figure D.

Parmi les filtres dont les schémas sont donnés figure D, quel est celui qui vous paraît le plus adapté à l’application d’altimétrie étudiée précédemment ? On justifiera la réponse en commentant clairement les caractéristiques de chacun d’eux.