

Durée : 4h.

**A/ Cours :****Question 1 :**

Etablir l'équation de diffusion à une dimension.

**Question 2 :**

Définition et estimation du libre parcours moyen dans un gaz parfait.

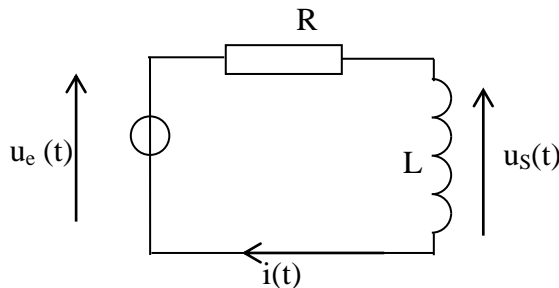
**B/ Exercices d'électricité proches du cours :****B1/ Circuit inductif, produit de signaux:**On donne le circuit électrique de la figure 1 avec  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 0,1 \text{ H}$ :

Figure 1

 $u_e(t) = U_{eM} \cos \omega t$  avec  $f = 1 \text{ kHz}$  ( $\omega = 2\pi f$ ) et  $U_{eM} = 5 \text{ V}$ .

1/ Déterminer littéralement en fonction de  $U_{eM}$ ,  $R$ ,  $L$  et  $\omega$  l'amplitude  $U_{sM}$  de  $u_s(t)$  et le déphasage  $\varphi_{u_s/u_e}$  de  $u_s(t)$  par rapport à  $u_e(t)$ .

2/ Calculer numériquement  $U_{sM}$  et  $\varphi_{u_s/u_e}$ .

3/ Les signaux  $u_s(t)$  et  $u_e(t)$  sont appliqués à l'entrée d'un multiplieur comme indiqué sur la figure 2.

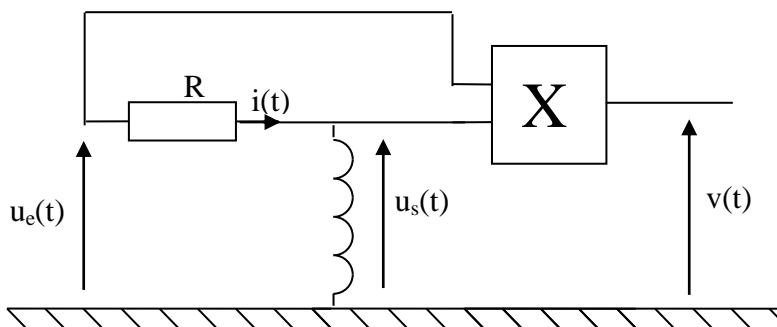


Figure 2

Le multiplieur donne une tension de sortie  $v(t) = k u_e(t) \cdot u_s(t)$  avec  $k = 0,1 \text{ V}^{-1}$ .

Donner l'expression littérale de  $v(t)$  obtenue après linéarisation du produit.

4/ Tracer le spectre en fréquences (amplitude et phase) de  $v(t)$ .

5/ Un second multiplieur est utilisé pour faire le produit de  $v(t)$  et d'un signal sinusoïdal  $p(t)$  d'amplitude  $P_o$  et de fréquence  $f_o$ .

$$p(t) = P_o \cos 2\pi f_o t$$

avec  $f_o = 10 \text{ kHz}$  et  $P_o = 10 \text{ V}$ .

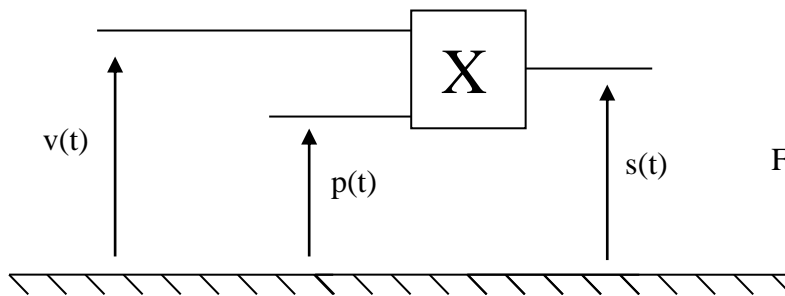


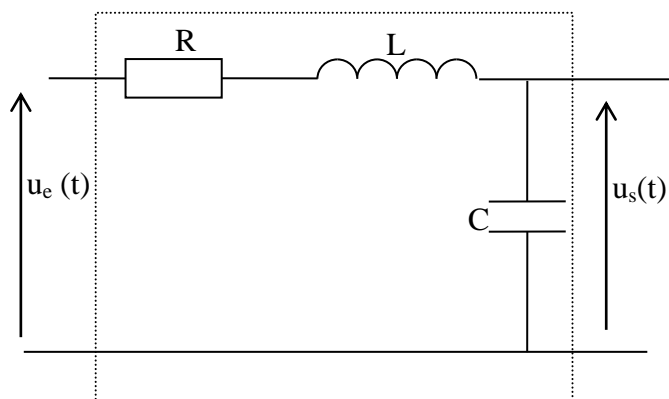
Figure 3

Calculer et tracer le spectre en fréquences (amplitude et phase) de  $s(t)$ .

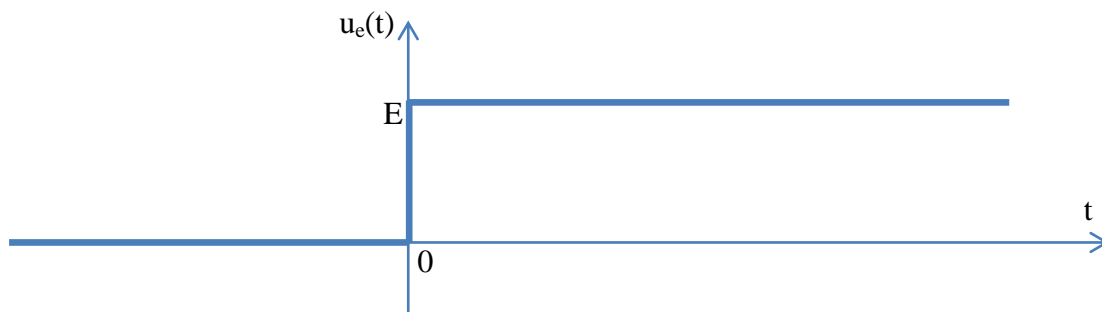
6/ Représenter les graphes  $u_e(t)$ ,  $u_s(t)$  et  $v(t)$ .

### B2/ Réponse à un échelon d'un réseau RLC:

On donne le quadripôle suivant :



$u_e(t)$  est un échelon de tension de hauteur  $E$ .



1/ Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $u_s(t)$ . La mettre sous forme canonique.

2/ On donne  $L = 10 \text{ mH}$ ,  $C = 10 \text{ nF}$  et  $R = 1 \text{ k}\Omega$ . Calculer le facteur d'amortissement  $\sigma$  et la pulsation propre  $\omega_o$  du dipôle RLC série.

3/ On suppose que le condensateur est initialement déchargé. Déterminer littéralement  $u_s(t)$ .

4/ Représenter l'allure de  $u_s(t)$ .

## C/ Phénomènes de diffusion de particules.

### C1/ Diffusion dans une sphère en régime variable :

Dans une sphère de silicium de centre O et de rayon R, on a introduit des dopants dont la concentration particulière en un point M est donnée par  $n(M,t) = n_o(t) \left(1 - \frac{r}{R}\right)$  où  $n_o(t)$  est une fonction du temps et r la distance OM.

1/ Calculer le nombre total N(t) de particules de dopants dans la sphère de rayon R en fonction de  $n_o(t)$  et de R.

2/ En utilisant la loi de Fick, calculer le flux  $\Phi(r,t)$  de dopants à travers une sphère de rayon r en fonction du coefficient de diffusion D des dopants dans la matrice de silicium, de R, r et  $n_o(t)$ .

3/ En déduire que la sphère perd des particules dopantes par son enveloppe externe.

4/ Démontrer alors que  $n_o(t)$  est solution de l'équation différentielle  $\frac{dn_o(t)}{dt} + \frac{n_o(t)}{\tau} = 0$ .

On exprimera  $\tau$  en fonction de R et du coefficient de diffusion D.

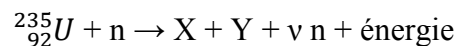
5/ On constate que la sphère de rayon R = 1 cm se vide de 95 % de son contenu en dopants en une durée  $\theta = 1$  an. Calculer D.

### C2/ Fission dans de l'Uranium :

Les recherches sur le noyau d'uranium ont mis en évidence le phénomène de fission nucléaire en 1939; ces travaux ont trouvé leur première application lors de l'explosion de la bombe d'Hiroshima, le 6 août 1945. Il va de soi que l'invention de la « bombe atomique » n'est peut-être pas le plus grand progrès de l'Humanité. Mais en l'état actuel des choses, cette arme existe, et il est souhaitable d'en aborder l'aspect physique pour mieux en saisir les tenants et aboutissants scientifiques.

#### Partie I : La désintégration de l'uranium 235 :

L'élément uranium se présente essentiellement sous la forme de deux isotopes;  ${}^{238}_{92}\text{U}$  et  ${}^{235}_{92}\text{U}$ .  ${}^{238}_{92}\text{U}$ , le plus répandu à l'état naturel, possède 92 protons et 146 neutrons ;  ${}^{235}_{92}\text{U}$  l'autre isotope est dit isotope « fissile ». Lorsqu'un noyau est heurté par un neutron (noté n), il peut « fissionner », suivant la réaction suivante :



où X et Y sont deux noyaux fils le plus souvent radioactifs.

Le nombre moyen  $\nu$  de neutrons émis dans la désintégration d'un noyau d' ${}^{235}_{92}\text{U}$  est  $\nu \approx 2,5$ . On voit ainsi la possibilité d'une réaction en chaîne, utilisable de manière contrôlée dans une centrale nucléaire, ou de manière explosive dans une bombe. L'énergie libérée par la désintégration d'un noyau d' ${}^{235}_{92}\text{U}$  est en moyenne de  $170 \cdot 10^6$  eV ( $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ). Lorsque la masse du bloc d'uranium devient supérieure à une valeur critique, la réaction en chaîne s'emballe et devient explosive.

1/ Quelle serait l'énergie libérée par la désintégration totale d'un kilogramme d' ${}^{235}_{92}\text{U}$  ?

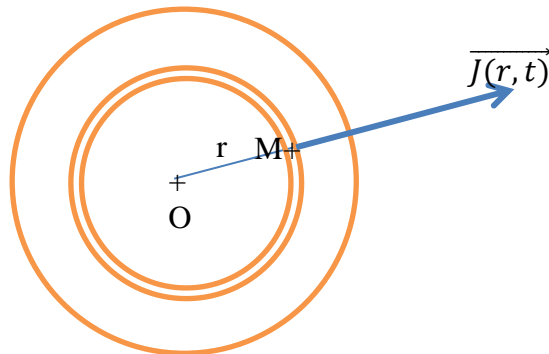
2/ L'énergie libérée par l'explosion d'une tonne de trinitrotoluène, un explosif chimique classique encore dénommé TNT, est de  $4,2 \cdot 10^9$  Joule. En déduire l'énergie libérée par la désintégration supposée totale d'un kilogramme d' ${}^{235}_{92}\text{U}$ , exprimée en équivalent tonnes de TNT. Commenter le résultat.

Partie II : Diffusion de neutrons :

3/ On étudie un échantillon sphérique d'uranium. Le rayon de cet échantillon est noté R. On suppose que les phénomènes physiques se produisant dans cet échantillon vérifient la symétrie sphérique.

Ainsi la densité particulière des neutrons en un point M de l'échantillon ne dépend que de la distance  $r = OM$  de M au centre O de la sphère et du temps t. On la notera  $n(r,t)$ .

De même, la densité volumique de courant de neutrons s'effectue radialement et ne dépend que du temps et de la distance au centre de la sphère. On la notera  $\overrightarrow{J}(r,t)$ . On rappelle que ce vecteur densité volumique de courant de neutrons est tel que  $\overrightarrow{J}(r,t) \cdot \overrightarrow{dS} \cdot dt$  représente le nombre de neutrons traversant la surface orientée de vecteur surface élémentaire  $\overrightarrow{dS}$  pendant l'intervalle de temps dt .



En effectuant un bilan clairement rédigé de l'évolution sur une durée dt du nombre de neutrons compris entre les sphères de rayon r et r + dr, établir l'équation différentielle reliant  $n(r,t)$  et  $J(r,t)$  :

$$4\pi r^2 \frac{\partial n(r,t)}{\partial t} + 4\pi \frac{\partial(r^2 J(r,t))}{\partial r} - \frac{(\nu-1)}{\tau} 4\pi r^2 n(r,t) = 0.$$

Bien expliquer en particulier l'origine du terme  $\frac{(\nu-1)}{\tau} 4\pi r^2 n(r,t)$ .

4/ Rappeler la loi de Fick. On précise qu'en coordonnées sphériques, pour un problème à symétrie sphérique, le gradient de  $n(r,t)$  s'écrit :

$$\vec{\nabla} n(r,t) = \frac{\partial n(r,t)}{\partial r} \vec{u}_r$$

$\vec{u}_r$  est le vecteur unitaire radial en M.

On cherche des solutions de la forme  $n(r,t) = N(r) e^{-\frac{t}{\tau_0}}$  où  $\tau_0$  est une constante et  $N(r)$  une fonction de r que l'on se propose de déterminer.

Donner l'expression de  $J(r,t)$  en fonction de t,  $\frac{dN(r)}{dr}$  et de D coefficient de diffusion des neutrons dans l'uranium.

5/ En déduire l'équation différentielle vérifiée par la fonction  $N(r)$ .

6/ On cherche  $N(r)$  sous la forme  $r \cdot N(r) = g(r)$ , où  $g(r)$  est une fonction de r à déterminer.

Etablir l'équation différentielle vérifiée par  $g(r)$ . Montrer qu'elle se met sous la forme :

$$\frac{d^2 g(r)}{dr^2} + \frac{1}{D} \left( \frac{(\nu-1)}{\tau} - \frac{1}{\tau_0} \right) g(r) = 0$$

### Partie III : Masse critique.

On cherche à déterminer la masse du bloc d'uranium (ou masse critique) pour laquelle la réaction en chaîne peut s'emballer et devenir explosive.

7/ On recherche une fonction  $N(r)$  ( $= g(r)/r$ ) telle que  $N(r = R) = 0$ , telle que  $N(r)$  ne s'annule pas pour  $r \in ]0, R[$  et telle que  $N(r)$  tende vers une limite finie quand  $r$  tend vers zéro.

Montrer que ces contraintes sont impossibles à réaliser dans le cas où  $\frac{(v-1)}{\tau} < \frac{1}{\tau_0}$ .

8/ On doit donc avoir  $\frac{(v-1)}{\tau} > \frac{1}{\tau_0}$ . On pose  $\alpha^2 = \frac{1}{D} \left( \frac{(v-1)}{\tau} - \frac{1}{\tau_0} \right)$ .

Exprimer dans ce cas  $N(r)$  en fonction de  $\alpha$ ,  $r$  et d'une constante d'intégration  $A$ .

9/ Montrer que les contraintes citées au 7/ imposent  $\tau_0 = \frac{1}{\left( \frac{v-1}{\tau} - D \frac{\pi^2}{R^2} \right)}$ .

10/ Donner  $n(r,t)$  et interpréter ce qui se passe si  $R$  devient trop grand.

11/ Exprimer le rayon minimal  $R_C$ , appelé rayon critique, tel qu'il puisse y avoir réaction en chaîne, en fonction de  $D$ ,  $\tau$  et  $v$ .

12/ On donne pour  ${}^{235}_{92}\text{U}$  de masse volumique  $\rho = 19 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$  :  $\pi^2 D \tau = 2,2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$  et  $v = 2,5$ .

Calculer la valeur du rayon critique  $R_C$ , ainsi que la masse critique  $M_C$  (masse de la boule d'uranium de rayon  $R_C$ ).