Devoir maison et correction.

Exercice 1

Une urne contient 2 boules : une rouge et une noire. On tire n fois une boule dans cette urne en la remettant après avoir noté sa couleur.

A_n :" on obtient des boules des 2 couleurs au cours des n tirages"

B_n :" on obtient au plus une boule noire"

1. $P(A_n)$?

On considère deux évènements, N_n :" on tire uniquement des boules noires au cours des n tirages" et B_n :" on tire uniquement des boules rouges au cours des n tirages"

On a alors $P(A_n) = 1 - P(N_n) - P(B_n)$. On a équiprobabilité puisqu'il y a remise.

On a $card(\Omega) = 2^n$, $card(N_n) = 1$ car il n'y a qu'un cas favorable qui est $NN\dots NNN$ et de même $card(B_n) = 1$

2. $P(B_n)$?

On considère l'évènement U_n :" on tire une seule boule noire au cours des n tirages"

On a alors $B_n = N_n \cup U_n$ donc $P(B_n) = P(N_n) + P(U_n)$

$card(U_n) = n$ car les cas favorables sont du type, $NBBB\dots BB$ ou $BNBB\dots BBB$ ... la boule noire peut occuper n positions. Donc $P(B_n) = \frac{1}{2^n} + \frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^n}$

3. L'événement $A_2 \cap B_2$:" une boule de chaque couleur au cours des 2 tirages", donc $card(A_2 \cap B_2) = 2$ car il y a deux cas favorables, NB et BN donc $P(A_2 \cap B_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = P(A_2)P(B_2)$ donc A_2 et B_2 ne sont pas indépendants.

4. L'événement $A_3 \cap B_3$:" une boule noire et 2 boules rouges" alors $card(A_3 \cap B_3) = 3$ car les cas favorables sont NBB, BNB et BBN.

Donc $P(A_3 \cap B_3) = \frac{3}{8} = \frac{3}{4}\frac{1}{2} = P(A_3)P(B_3)$ donc A_3 et B_3 sont des évènements indépendants.

Donc $P_{A_3}(B_3) = \frac{P(A_3 \cap B_3)}{P(A_3)} = \frac{1}{2}$ ... comment trouver ce résultat directement ? ? il faut envisager les cas favorables à A_3 c'est à dire BNN, NBN, NNB, BBN, BNB et NBB donc 6 cas favorables, et sur ces 6 cas, 3 sont favorables à B_3 ... autant dire que ce n'est pas une justification que j'ai vu dans les copies ! ! !

Que vaut $P_{A_n}(B_n)$? Avis aux malins !

Exercice 2.

Pour se rendre au lycée, un élève a le choix entre 4 itinéraires A, B, C, D

La probabilité qu'il a de choisir A (resp B, C, D) est $\frac{1}{3}$ (resp $\frac{1}{4}, \frac{1}{12}$)

La probabilité d'arriver en retard en empruntant A (resp B, C) est $\frac{1}{20}$ (resp $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$). En empruntant D, il n'est jamais en retard.

1. Quelle est la probabilité que l'élève choisisse l'itinéraire D ?

$\{A, B, C, D\}$ forment un système complet d'événements.

Donc $P(D) = 1 - P(A) - P(B) - P(C) = \frac{1}{3}$

2. L'élève arrive en retard. Quelles est la probabilité qu'il ait choisi l'itinéraire C ?

V :" lélève arrive en retard"

On cherche $P_V(C)$. On utilise la formule de Bayes avec le système complet d'évènements $\{A, B, C, D\}$! ! ! ! Attention, il n'y a pas toujours que deux événements ... ici il y en a 4 ! ! ! Cela se ressent en lisant l'énoncé et au vu des probabilités que l'on peut tirer de l'énoncé ... on a $P_A(V) = \frac{1}{20}$, $P_B(V) = \frac{1}{10}$, $P_C(V) = \frac{1}{5}$ et $P_D(V) = 1$.

On en déduit $P_V(C) = \frac{P_C(V)P(C)}{P_A(V)P(A)+P_B(V)P(B)+P_C(V)P(C)+P_D(V)P(V)} = \frac{2}{7}$

Problème

Soit $n \geq 2$, une urne contient n boules numérotées de 1 à n dans laquelle on tire deux boules sans remise . On note X (resp Y) la v.a.r égale au plus petit (resp plus grand) des deux numéros obtenus.

Compréhension Il s'agit donc d'un tirage simultané de deux boules, il y a donc toujours le numéro d'une boule qui est plus petit que l'autre. Il y a $\binom{n}{2}$ tirages possibles. On est en équiprobabilité.

1. Pour tout $k \in \{2, \dots, n\}$, calculer $P(Y \leq k)$

Si $(Y \leq k)$ alors les deux boules ont été tirée dans l'ensemble $\{1, \dots, k\}$, il y a donc $\binom{k}{2}$ cas favorables. On a donc $P(Y \leq k) = \frac{k(k-1)}{n(n-2)}$.

2. On sait que $Y(\Omega) = \{2, \dots, n\}$, elle est à valeurs entières. Donc l'événement $(Y \leq k) = (Y = k)_c up(Y \leq k-1)$ et les deux événements sont disjoints donc $P(Y \leq k) = P(Y = k) + P(Y \leq k-1)$, on en déduit

$$P(Y = k) = P(Y \leq k) - P(Y \leq k-1) = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} - \frac{(k-1)(k-2)}{n(n-1)} = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}$$

3. On en déduit que $E(Y) = \sum_{k=2}^{n} kP(Y = k) = \frac{2}{n(n-1)}(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k) = \frac{n+1}{3}$ après simplification des calculs.

4. On a avec la formule de Koenig, $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$ et $E(Y^2) = \sum_{k=2}^{n} k^2 P(Y = k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 P(Y = k)$ on trouve $E(Y^2) = \frac{(n+1)(3n+2)}{6}$ (faites les calculs !) et $V(Y) = \frac{(n+1)(4n+2)}{9}$

5. On a $X(\Omega) = \{1, \dots, n-1\}$, on ne peut trouver directement l'événement $(X = k)$ car il y aurait trop de cas à traiter, en revanche, on peut trouver le nombre de cas favorables à l'évènement $(X \geq k)$, en effet cela signifie queles deux boules tirées ont un chiffre supérieur à k, donc qu'elles ont été tirées dans l'ensemble $\{k, k+1, \dots, n\}$, cet ensemble contient $n - k + 1$ éléments, il y a donc $\binom{n-k+1}{2}$ cas favorables.

On en déduit donc que $P(X \geq k) = \frac{(n-k+1)(n-k)}{n(n-1)}$

On sait que l'événement $(Xgeqk) = (X = k) \cup (X \geq k+1)$ et les deux évènements sont disjoints donc $P(x \geq k) = P(X = k) + p(X \geq k+1)$ donc

$$P(X = k) = P(X \geq k) - P(X \geq k+1) = \frac{(n-k+1)(n-k)}{n(n-1)} - \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)} = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$$

6. On a $Y(\omega) = (n+1-X)(\Omega)$ et pour tout $k \in 2, \dots, n$, on a

$$P(n+1-X = k) = P(X = n+1-k) = \frac{2(n-(n+1-k))}{n(n-1)} = \frac{2(k-1)}{n(n-1)} = P(Y = k)$$

Les deux v.a.r ont donc la même loi .

7. Si les deux v.a.r ont la même loi, elles ont donc la même espérance et la même variance, donc $E(Y) = E(n+1-X) = n+1-E(X)$, on peut donc en déduire $E(X)$ et $V(Y) = V(n+1-X) = (-1)^2 V(X) = V(X)$.