Corrigé du Devoir en Temps Libre n°14.

Exercice (Banque PT 2009 extrait).

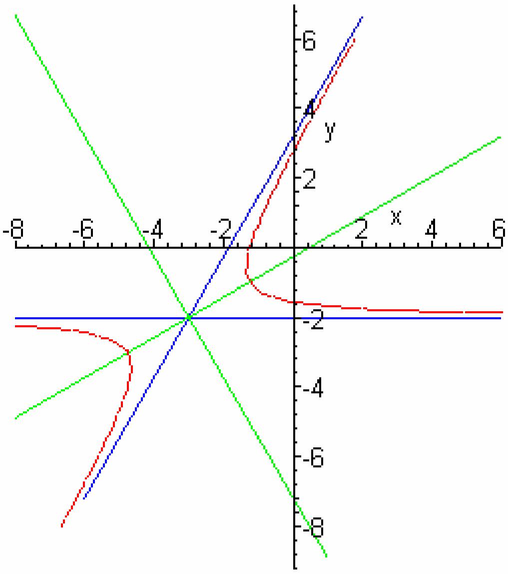
1. Le changement de repère qui permet de passer de $\mathscr{R}$ à $\mathscr{R}'$ se traduit par : $\begin{cases} x = x'-3 \\ y = y'-2 \end{cases}$,
   en vérifiant par exemple que le point O' a bien pour coordonnées (0,0) dans ce nouveau repère.
   Il suffit alors de remplacer les coordonnées (x,y) de M dans la première équation de (Γ) pour obtenir cette équation dans $\mathscr{R}'$ qui est alors : $y'^2 - \sqrt{3}.x'.y' + 2 = 0$.
2. La matrice A est bien sûr ici : A = $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$.
3. a. On détermine ensuite les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
   Le calcul du polynôme caractéristique de A conduit à : Sp(A) = $\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$.
   Les espaces propres de A par ailleurs sont : $E_{-\frac{1}{2}}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, et : $E_{\frac{3}{2}}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\right)$.
   A est évidemment diagonalisable (symétrique réelle ou deux valeurs propres simples), et on peut poser : P = $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, D = $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, pour écrire : D = ${}^tP.A.P$, où P est orthogonale positive.
   Autrement dit, en posant : i'' = $\frac{1}{2}.i - \frac{\sqrt{3}}{2}.j$, et : j'' = $\frac{\sqrt{3}}{2}.i + \frac{1}{2}.j$, le repère : $\mathscr{R}''$ = (O',i'',j''), est orthonormé direct et la partie quadratique de l'équation de (Γ) devient (dans les nouvelles coordonnées (x'',y'')) :
   avec : X' = $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, X'' = $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$, on obtient : $y'^2 - \sqrt{3}.x'.y'$ = ${}^tX'.A.X'$ = ${}^tX''.D.X''$ = $\frac{3}{2}.x''^2 - \frac{1}{2}.y''^2$.

   b. L'équation de (Γ) dans $\mathscr{R}'$ est donc : $\frac{3}{2}.x''^2 - \frac{1}{2}.y''^2 + 2 = 0$

   c. La transformation permettant de passer de $\mathscr{R}$ à $\mathscr{R}'$ est une translation de vecteur [– 3.i – 2.j], et celle qui permet de passer de $\mathscr{R}'$ à $\mathscr{R}''$ est une rotation de centre O' est d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
   La composée de ces deux transformations est encore une rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$, mais de centre son seul point invariant (que l'on pourrait déterminer à l'aide de son expression analytique).

   e. (Γ) est donc une hyperbole d'équation réduite standard : $\frac{x''^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} - \frac{y''^2}{2^2} = -1$, et dont les deux branches ont pour axe de symétrie l'axe O'y''.
   En calculant sur l'équation de départ l'expression notée habituellement ($a.c - b^2$), qui correspond au déterminant de A (et au produit de ses valeurs propres) on obtient ici : det(A) = $0 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} < 0$.
   La conique était donc du genre hyperbole.
4. Les sommets de (Γ) dans le repère $\mathscr{R}''$ sont déterminés par : x'' = 0, y'' = 2.ε, avec : $\varepsilon = \pm 1$.
   Ils ont alors pour coordonnées dans le repère $\mathscr{R}'$: ($\varepsilon.\sqrt{3}$, ε), et dans le repère $\mathscr{R}$: ($\varepsilon.\sqrt{3} - 3$, $\varepsilon - 2$).

5. Dans $\mathscr{R}''$, les asymptotes à (Γ) sont données par la relation : $\dfrac{x''^2}{\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} - \dfrac{y''^2}{2^2} = 0$, soit : $y'' = \varepsilon . x''.\sqrt{3}$.
Ramené dans $\mathscr{R}$, ces équations deviennent :
y = -2, et : y = $x.\sqrt{3} + 3.\sqrt{3} - 2$.
6. On commence par tracer (Γ) dans le repère $\mathscr{R}''$ en gardant le repère $\mathscr{R}$ en filigrane, et on obtient :
En vert, apparaissent les axes du repère $\mathscr{R}''$ et en bleu, les asymptotes à l'hyperbole.



Problème (TPE Maths appliquées 1996).

Partie 1.

1. Les fonctions sous les intégrales définissant X et Y étant définies et de classe C^∞ sur ℝ, X et Y comme primitives s'annulant en 0 de ces fonctions sont elles-mêmes de classe C^∞ sur ℝ.
Puis : ∀ t ∈ ℝ, $X(-t) = \int_0^{-t} \cos(u^2).du = \int_0^{t} \cos((-v)^2).(-dv) = -X(t)$, de même pour Y.
X et Y sont donc des fonctions impaires et Γ présente une symétrie par rapport à O (constatée par le fait que le point M(-t) est symétrique de M(t) par rapport à O).
Cela permet de réduire l'intervalle d'étude à $\mathbb{R}^+$.
2. Cette question correspond à la convergence des intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} \cos(u^2).du$, et $\int_0^{+\infty} \sin(u^2).du$.
Or : ∀ A ≥ 0, $\int_0^{A} \cos(u^2).du = \int_0^{A^2} \dfrac{\cos(v)}{2.\sqrt{v}}.dv$, à l'aide du changement de variable défini par : v = u^2 (qui est un C^1-difféomorphisme de]0,A] dans]0,A^2]).
On intègre par parties (en vérifiant que les différents termes qui apparaissent ont une limite finie en 0) :
$$\forall A \geq 0,\ \int_0^{A} \cos(u^2).du = \int_0^{A^2} \frac{\cos(v)}{2.\sqrt{v}}.dv = \left[\frac{\sin(v)}{2.\sqrt{v}}\right]_0^{A^2} + \int_0^{A^2} \frac{\sin(v)}{4.v^{\frac{3}{2}}}.dv = \frac{\sin(A^2)}{2.A} + \int_0^{A^2} \frac{\sin(v)}{4.v^{\frac{3}{2}}}.dv.$$
On constate alors que le terme intégré a une limite en +∞ (théorème des gendarmes) et que la nouvelle intégrale correspond à une fonction intégrable sur [1,+∞), puisque : ∀ v ≥ 1, $\dfrac{|\sin(v)|}{4.v^{\frac{3}{2}}} \leq \dfrac{1}{4.v^{\frac{3}{2}}}$, et : $1 < \dfrac{3}{2}$.
Donc la deuxième intégrale a une limite finie en +∞ ce qui montre finalement que $\int_0^{+\infty} \cos(u^2).du$ converge.
On montrerait de façon complètement similaire que $\int_0^{+\infty} \sin(u^2).du$ converge également.
La courbe Γ présente donc un point limite K dont les coordonnées sont la valeur commune de ces deux intégrales, comme le texte propose de l'admettre.
3. On utilise le fait que : ∀ t ∈ ℝ, X'(t) = cos(t^2), Y'(t) = sin(t^2), pour en déduire les variations de X et de Y.
On travaillera évidemment sur les intervalles $\left[\sqrt{k.\dfrac{\pi}{2}}, \sqrt{(k+1).\dfrac{\pi}{2}}\right]$, avec : k ∈ ℕ (on travaille sur $\mathbb{R}^+$).
4. Puisque : ∀ t ∈ ℝ, $\int_t^{+\infty} \cos(u^2).du = \int_0^{+\infty} \cos(u^2).du - \int_0^{t} \cos(u^2).du$, de même pour l'autre quantité, il est alors clair que F(t) représente le carré de la distance KM(t), soit la distance d'un point courant de la courbe au point limite K. On pose dans la suite, pour t réel : $F(t) = \left(\int_t^{+\infty} \cos(u^2).du\right)^2 + \left(\int_t^{+\infty} \sin(u^2).du\right)^2$.
Avec l'égalité établie au-dessus, il est clair que : $t \mapsto \int_t^{+\infty} \cos(u^2).du$, est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ (de même pour la fonction équivalente en sinus), donc que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, et que :
∀ t ∈ $\mathbb{R}^+$, F'(t) = $2.\int_t^{+\infty} \cos(u^2).du.(-\cos(t^2)) + 2.\int_t^{+\infty} \sin(u^2).du.(-\sin(t^2))$, soit :

$\forall$ t $\in \mathbb{R}^+$, $F'(t) = -2.\int_t^{+\infty}[\cos(u^2).\cos(t^2)+\sin(u^2).\sin(t^2)].du = -2.\int_t^{+\infty}\cos(u^2-t^2).du$.

On peut poser le changement de variable : u = $\sqrt{t^2+v}$, (C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+*}$ dans]t,+∞)), et :

$\forall$ t $\in \mathbb{R}^+$, $F'(t) = -\int_0^{+\infty}\frac{\cos(v)}{\sqrt{v+t^2}}.dv$.

5. a. On peut réécrire l'intégrale proposée en :

$$\int_0^{\pi} f(u).\cos(u).du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u).\cos(u).du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(u).\cos(u).du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u).\cos(u).du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\pi-v).\cos(\pi-v).dv,$$

à l'aide du changement de variable : v = π – u, dans la dernière intégrale.

Puis : $\int_0^{\pi} f(u).\cos(u).du = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[f(u)-f(\pi-u)].\cos(u).du$.

Or la fonction dans la dernière intégrale est continue sur [0, $\frac{\pi}{2}$], positive (puisque f est décroissante sur [0,π]) et non nulle au moins en un point (par exemple en : u = 0) .

Finalement : $\int_0^{\pi} f(u).\cos(u).du > 0$.

b. On peut commencer par remarquer que la série proposée est alternée puisque :

$\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^{\pi}\frac{\cos(\theta+n.\pi)}{\sqrt{a+\theta+n.\pi}}.d\theta$, avec le changement de variable : v = θ + n.π, puis :

$\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n.\int_0^{\pi}\frac{\cos(\theta)}{\sqrt{a+\theta+n.\pi}}.d\theta$, cette dernière intégrale étant positive d'après la question 5.a.

De plus, ($|u_n|$) décroît car : $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $|u_n|-|u_{n+1}| = \int_0^{\pi}\left[\frac{\cos(\theta)}{\sqrt{a+\theta+n.\pi}}-\frac{\cos(\theta)}{\sqrt{a+\theta+(n+1).\pi}}\right].d\theta$.

Or : $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $\theta \mapsto \frac{1}{\sqrt{a+\theta+n.\pi}}-\frac{1}{\sqrt{a+\theta+(n+1).\pi}}$, est encore décroissante et positive sur [0,π],

autrement dit la différence étudiée est positive et ($|u_n|$) est bien décroissante.

Enfin : $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $|u_n| \le \int_0^{\pi}\frac{|\cos(\theta)|}{\sqrt{a+\theta+n.\pi}}.d\theta \le \int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{a+n.\pi}}.d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{a+n.\pi}}$.

Finalement, la série $\sum u_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées, elle converge et sa somme est du signe de son premier terme et est donc (strictement) positive.
Or cette somme coïncide avec I qui est donc strictement positif.

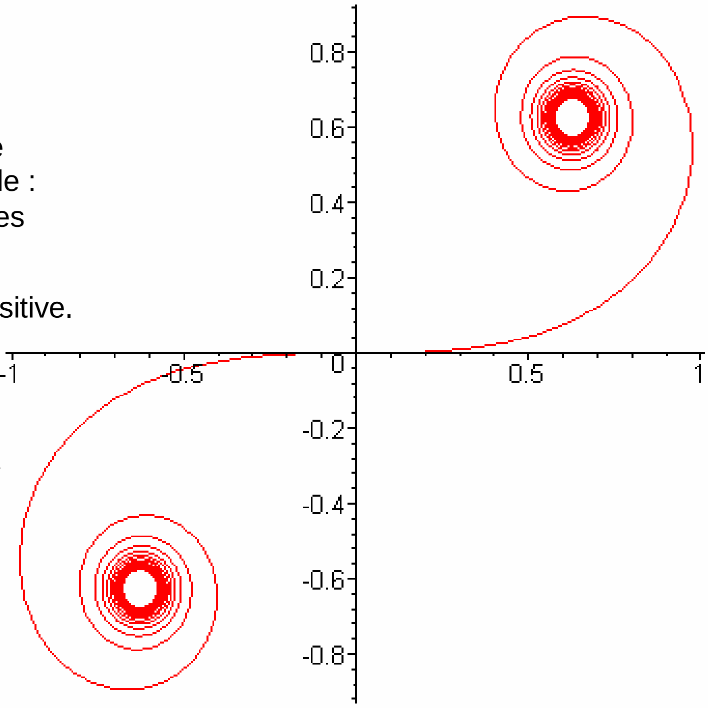
c. On en déduit que F' est strictement négative sur $\mathbb{R}^+$ et que F est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

6. On peut ensuite noter :

$\forall$ k $\in \mathbb{N}$, $Y(\sqrt{n.\pi}) = \int_0^{\sqrt{n.\pi}}\sin(u^2).du = \int_0^{n.\pi}\frac{\sin(v)}{2.\sqrt{v}}.dv$,

puis montrer que cette intégrale s'écrit comme une somme partielle d'une série alternée, vérifiant le critère spécial (c'est immédiat avec un changement de variable : v = θ + n.π) et donc ayant toutes ses sommes partielles du même signe que la première somme partielle correspondant à : $Y(\sqrt{\pi}) = \int_0^{\pi}\frac{\sin(v)}{2.\sqrt{v}}.dv$, elle-même positive.

Enfin, pour : t > 0, Y(t) peut être encadré par deux quantités successives $Y(\sqrt{n.\pi})$ et $Y(\sqrt{(n+1).\pi})$ ainsi que le montre le tableau de variations dressé à la question 2, donc que Y(t) reste strictement positif.



7. La courbe Γ n'admet donc pas de point double puisque cela ne pourrait se produire que pour des valeurs de t de même signe (du fait que M(t) reste dans le quadrant (x > 0, y > 0), pour : t > 0, et dans le quadrant symétrique pour : t < 0), et que si :

$\exists\ 0 < t_1 < t_2$, $M(t_1) = M(t_2)$, alors : $KM(t_1) = KM(t_2)$, et : $F(t_1) = F(t_2)$, ce qui est impossible puisque F est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

8. Une condition nécessaire pour qu'il y ait un point d'inflexion en un point régulier M(t) est que les vecteurs dérivées première et seconde soient colinéaires ou encore : $\begin{vmatrix} X'(t) & X''(t) \\ Y(t) & Y''(t) \end{vmatrix} = 0$.

   Ici, tous les points sont réguliers (puisque sinus et cosinus ne peuvent s'annuler simultanément, les dérivées X' et Y' ayant été calculées à la question 3),

   et : $\begin{vmatrix} X'(t) & X''(t) \\ Y(t) & Y''(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(t^2) & -2.t.\sin(t^2) \\ \sin(t^2) & 2.t.\cos(t^2) \end{vmatrix} = 2.t$.

   Il ne peut donc y avoir inflexion que pout : t = 0, soit l'origine, et c'est bien le cas pour des raisons de symétrie par rapport à O.
9. On en déduit la courbe, appelée spirale de Cornu…

Partie 2.

1. Une abscisse curviligne s de la variable t vérifie : $[s'(t)]^2 = [X'(t)]^2 + [Y'(t)]^2 = \cos^2(t^2) + \sin^2(t^2) = 1$.
   Si on choisit l'origine des abscisses curvilignes en 0 et qu'on oriente la courbe suivant les t croissants, on peut donc proposer : s(t) = t.
2. Si on note T(t) le vecteur unitaire tangent à la courbe Γ au point d'abscisse t, on a :
   $T(t) = \cos(t^2).i + \sin(t^2).j$.
   La courbure c(t) en ce point (supposé birégulier) est donnée
   par la relation : T'(t) = c(t).s'(t).N(t), où N(t) est le vecteur directement orthogonal à T(t).
   Or : $T'(t) = -2.t.\sin(t^2).i + 2.t.\cos(t^2).j$, et : $N(t) = -2\sin(t^2).i + 2.\cos(t^2).j$ (confirmé par le dessin précédent).
   On en déduit qu'en dehors de l'origine, la courbure au point M(t) vaut : c(t) = 2.t, et le rayon de courbure en ce point : $R(t) = \dfrac{1}{2.t}$.
   Il est alors clair qu'on a bien : 2.R(t).s(t) = 1
3. a. Puisqu'en tout point d'un arc birégulier, la courbure est donnée par la relation :
      $\forall\ t \in I,\ c(t) = \dfrac{\varphi'(t)}{s'(t)}$, et que pour l'arc considéré ici, le rayon de courbure est toujours défini et non nul,
      on en déduit que :
      $\forall\ t \in I,\ \varphi'(t) = \dfrac{s'(t)}{R(t)} = 2.s(t).s'(t)$, d'où : $\exists\ k \in \mathbb{R}$, $\forall\ t \in I$, $\varphi(t) = k + s(t)^2$.

   b. Puisque $\varphi(t)$ mesure un angle, on peut effectuer une rotation du repère et choisir : k = 0.
      Dans ce cas, les formules de Frénet et la définition de φ conduisent à écrire :
      $x'(t) = s'(t).\cos(\varphi(t)) = s'(t).\cos(s(t)^2)$, et : $x(t) = \int_0^t s'(t).\cos(s(t)^2).dt + x_0 = \int_0^{s(t)} \cos(u^2).du + x_0$, avec le changement de variable : u = s(t), et où x_0 est une constante.
      De même : $y'(t) = s'(t).\cos(s(t)^2))$, puis : $y(t) = \int_0^{s(t)} \sin(u^2).du + y_0$.
      Or l'arc étant régulier, s' ne s'annule pas et s est un paramétrage admissible de l'arc.
      Si donc on utilise s comme paramètre, alors on obtient la courbe paramétrée suivante :
      - $x(s) = \int_0^s \cos(u^2).du + x_0$
      - $y(s) = \int_0^s \sin(u^2).du + y_0$,

      et donc moyennant une rotation et une translation on retrouve un arc inclus dans la spirale de Cornu.

   c. La relation : 2.s.R = 1, est donc caractéristique (à rotation et translation près) d'une spirale de Cornu.