Corrigé du Devoir en Temps Libre n°08.

Exercice 1 (E3A PC 2011 extrait).

1. a. Pour x réel fixé non nul, on constate que : $|u_n(x)| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2.|x|}{n^2.\pi^2}$.

   La série des équivalents est alors à une constante près une série de Riemann convergente, et par comparaison de séries à termes positif (SATP), la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ est alors absolument convergente.

   Comme de plus la série $\sum_{n\geq 1} u_n(0)$ est la série nulle et donc converge, on en conclut que la série de fonctions converge simplement sur ℝ.

   b. Soit donc a fixé strictement positif.

   Il est immédiat que : ∀ n ≥ 1, ∀ x ∈ [-a,+a], $|u_n(x)| \leq \dfrac{2.a}{n^2.\pi^2}$, d'où : $\sup_{x\in[-a,+a]} |u_n(x)| \leq \dfrac{2.a}{n^2.\pi^2}$.

   A nouveau, par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit la convergence normale de la série de fonctions sur [-a,+a].
   Sur ℝ, les variations de u_n (obtenues à l'aide de sa dérivée) montrent que $|u_n|$ admet un sup sur ℝ atteint en n.π, puis que ce sup vaut $\dfrac{1}{n.\pi}$: il n'y a donc pas convergence normale sur ℝ de la série de fonctions.

   c. Puisque toutes les fonctions qui constituent la série précédente sur ℝ sont continues sur ℝ et que la série de fonctions converge normalement sur tout segment [-a,+a] avec : a > 0, on en déduit que U est continue sur ℝ.

2. a. Il est immédiat que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x \frac{2.t}{t^2+n^2.\pi^2}.dt = [\ln(t^2+n^2.\pi^2)]_0^x = \ln(x^2+n^2.\pi^2) - \ln(n^2.\pi^2) = \ln\left(1+\frac{x^2}{n^2.\pi^2}\right).$$

   b. A nouveau, pour x fixé non nul, on constate que : $v_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{n^2.\pi^2}$, ce qui garantit la convergence de la série (à termes positifs) $\sum_{n\geq 1} v_n(x)$.

   Comme la série $\sum_{n\geq 1} v_n(0)$ est encore la série nulle, elle converge aussi, d'où la convergence simple de la série de fonctions sur ℝ.

   Remarque : on aurait aussi pu utiliser pour tout réel x : ∀ n ∈ ℕ*, $0 \leq v_n(x) \leq \dfrac{x^2}{n^2.\pi^2}$.

   c. Pour x fixé non nul, la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur [-|x|,+|x|], donc sur [0,x] (ou [x,0] suivant le signe de x) et donc : $\int_0^x U(t).dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t).dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x u_n(t).dt = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = V(x)$,

   égalité qui reste valable pour : x = 0, puisque les deux termes s'annulent.

3. Pour x nul, la suite $(p_n(0))$ est la suite nulle qui converge vers 0.
   Pour x non nul, on constate que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln\left(\frac{p_n(x)}{x}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{x^2}{k^2.\pi^2}\right) = \sum_{k=1}^{n} v_k(x).$$

   Donc la suite $\left(\ln\left(\dfrac{p_n(x)}{x}\right)\right)$ est convergente et sa limite vaut V(x).

   Par continuité de l'exponentielle sur ℝ, la suite $(p_n(x))$ converge donc vers x.exp(V(x)).
   Finalement, la suite de fonctions (p_n) converge simplement sur ℝ vers p définie par :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) = x.e^{V(x)} = x.\exp\left(\int_0^x U(t).dt\right).$$

Exercice 2 (E3A MP 2011 extrait).

1. On pourrait démontrer l'égalité proposée à l'aide d'une décomposition de la fraction sous l'intégrale en éléments simples (deux termes avec des dénominateurs du second degré), puis en intégrant chacun de ces deux termes à l'aide d'un logarithme et d'un Arctan).
2. a. On peut commencer par remarquer que :

$$\forall x \in \,]0,2.\pi[, \ \forall t \in [1,+\infty), \ 0 \leq \frac{1}{\text{ch}(t^2)+1} \leq \frac{1}{\text{ch}(t^2)-\cos(x)} \leq \frac{1}{\text{ch}(t^2)-1} \leq \frac{2}{\exp(t^2)-2}.$$

Cela permet d'en déduire que, pour tout x dans]0,2.π[, la fonction (de t) sous l'intégrale est définie, continue, positive et majorée sur [1,+∞) par φ définie par : $\varphi(t) = \dfrac{2}{\exp(t^2)-2}$.

De plus on peut aussi écrire en +∞ : $\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\exp(t^2)} \leq \dfrac{2}{\exp(t)} = 2.e^{-t}$.

Donc φ est intégrable sur [1,+∞), ainsi que la fonction sous l'intégrale proposée, et ceci pour tout x dans]0,2.π[.

Enfin, la double inégalité du début garantit de plus que :

$$\forall x \in \,]0,2.\pi[, \ 0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\text{ch}(t^2)-\cos(x)} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\text{ch}(t^2)-1},$$

autrement dit, cette fonction de x est bornée sur]0,2.π[.

b. Il est immédiat que la fonction proposée est définie sur]0,1], et en 0, on utilise évidemment un développement limité : $\text{ch}(t^2) = 1+\dfrac{t^4}{2}+\dfrac{t^8}{24}+o(t^8)$, d'où : $|\psi(t)| = \left|\dfrac{\frac{t^4}{2}+1-\text{ch}(t^2)}{\frac{t^4}{2}.(\text{ch}(t^2)-1)}\right| = \left|\dfrac{-\frac{t^8}{24}+o(t^8)}{\frac{t^8}{4}+o(t^8)}\right|$, et cette quantité admet bien une limite finie en 0 qui est $\dfrac{1}{6}$.

Donc la fonction de t proposée se prolonge bien par continuité en 0 avec cette valeur (et la fonction prolongée est alors continue sur [0,1]).

c. Transformons la quantité proposée :

$$\forall x \in \,]0,2.\pi[, \ \int_0^1 \frac{dt}{\text{ch}(t^2)-\cos(x)} - \int_0^1 \frac{dt}{1+\frac{t^4}{2}-\cos(x)} = \int_0^1 \psi(t).\theta(x,t).dt,$$

où ψ est la fonction de la question précédente et où : $\theta(x,t) = \dfrac{\frac{t^4}{2}.(\text{ch}(t^2)-1)}{[\text{ch}(t^2)-\cos(x)].[1+\frac{t^4}{2}-\cos(x)]}$.

On constate alors que : 0 ≤ θ(x,t) ≤ 1, en minorant cos(x) par 1, et on en déduit que :

$$\forall x \in \,]0,2.\pi[, \ \left|\int_0^1 \frac{dt}{\text{ch}(t^2)-\cos(x)} - \int_0^1 \frac{dt}{1+\frac{t^4}{2}-\cos(x)}\right| = \left|\int_0^1 \psi(t).\theta(x,t).dt\right| \leq \int_0^1 |\psi(t).\theta(x,t)|.dt \leq \int_0^1 |\psi(t)|.dt,$$

ce qui montre bien que la différence reste bornée sur]0,2.π[.

d. La fonction intégrée est continue sur [0,1] et le changement de variable y est de classe C^1, d'où :

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+\frac{t^4}{2}-\cos(x)} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{(2.(1-\cos(x))}}} (2.(1-\cos(x))^{\frac{1}{4}}.\frac{du}{(1-\cos(x)).(1+u^4)} = \frac{\sqrt[4]{2}}{(1-\cos(x))^{\frac{3}{4}}}.\int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{(2.(1-\cos(x))}}} \frac{du}{(1+u^4)}.$$

Quand x tend vers 0, cette dernière intégrale tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4} = \frac{\pi.\sqrt{2}}{4}$, et avec un développement limité du cosinus en 0 par exemple, on en déduit l'équivalent : $I(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{\pi.\sqrt{2}}{4}.\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}.x^{-\frac{3}{2}}$.

3. On peut effectuer le changement de variable (C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+*}$ sur lui-même) : u = n.t, dans l'intégrale proposée et : $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-n.t}}{\sqrt{t}}.dt=\frac{1}{\sqrt{n}}.\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}.du=\frac{1}{\sqrt{n}}.\int_0^{+\infty}u^{-\frac{1}{2}}.\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}.du=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\frac{1}{\sqrt{n}}$,
d'où l'égalité cherchée.
4. a. On peut écrire, à l'aide des formules d'Euler :

$$\sum_{n=1}^{N}e^{-n.t}.\sin(n.x)=\mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{N}e^{-n.t}.e^{i.n.x}\right)=\mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{N}e^{n.(-t+i.x)}\right).$$

Pour : $(x,t)\neq(0,0)$, on peut alors sommer en : $\sum_{n=1}^{N}e^{n.(-t+i.x)}=e^{(-t+i.x)}.\frac{1-e^{N.(-t+i.x)}}{1-e^{(-t+i.x)}}$.

On multiplie alors le dénominateur par le complexe conjugué et, après simplification :

$$\sum_{n=1}^{N}e^{-n.t}.\sin(n.x)=\frac{1}{2.(\mathrm{ch}(t)-\cos(x))}.[\sin(x)-e^{-N.t}.\sin((N+1).x)-e^{-(N+1).t}\sin(N.x)].$$

Enfin, dans le cas particulier où : x = t = 0, la somme demandée est nulle.

b. L'égalité proposée résulte simplement l'utilisation de l'égalité établie à la question 3.
Puis, pour tout : $x\in\,]0,2.\pi[$, on en déduit que :

$$S_N(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.\int_0^{+\infty}\frac{1}{2.(\mathrm{ch}(t)-\cos(x))}.[\sin(x)-e^{-N.t}.\sin((N+1).x)-e^{-(N+1).t}\sin(N.x)].dt,$$

et on peut alors utiliser le changement de variable : $t=u^2$, qui est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^{+*}$ dans lui-même, d'où on déduit que :

$$S_N(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.\int_0^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{ch}(u^2)-\cos(x)}.[\sin(x)-e^{-N.u^2}.\sin((N+1).x)-e^{-(N+1).u^2}\sin(N.x)].du.$$

Les 5/2 peuvent alors penser à utiliser le théorème de convergence dominée pour passer à la limite, où remarquer que : $\int_0^{+\infty}\frac{\left|e^{-N.u^2}.\sin((N+1).x)-e^{-(N+1).u^2}\sin(N.x)\right|}{\mathrm{ch}(u^2)-\cos(x)}.du\leq\frac{2}{1-\cos(x)}.\int_0^{+\infty}e^{-N.u^2}.du$.

Il suffit alors de montrer que cette dernière intégrale tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$.
En admettant le résultat indiqué, la suite $(S_N(x))$ est bien convergente et :

$$\forall x\in\,]0,2.\pi[,\ \lim_{N\to+\infty}S_N(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n.x)}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{\mathrm{ch}(t^2)-\cos(x)}.dt=\frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}}.\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\mathrm{ch}(t^2)-\cos(x)}..$$

On vient de montrer que la série de fonctions de terme général u_n, défini par : $u_n(x)=\frac{\sin(n.x)}{\sqrt{n}}$, converge simplement sur]0.,2.π[vers la fonction définie dans la partie droite de l'égalité.

c. On en déduit l'équivalent : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n.x)}{\sqrt{n}}\underset{0^+}{\sim}\frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}}.\frac{\pi}{\sqrt{2}}.x^{-\frac{3}{2}}\underset{0^+}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2.x}}$.

Exercice 3 (Mines-Ponts M – P' 1992 épreuve pratique extrait).

1. a. On calcule pour les trois séries proposées le sup de chaque fonction sur [a,b], afin d'établir évidemment la convergence normale.
On a respectivement : $\sup_{x\in[a,b]}|u_n(x)|=\frac{1}{(n.a+1)^2}$, $\sup_{x\in[a,b]}|u_n'(x)|=\frac{2.n}{(n.a+1)^3}$, $\sup_{x\in[a,b]}|u_n''(x)|=\frac{6.n^2}{(n.a+1)^4}$.
On en déduit immédiatement que, dans les trois cas, la série des sup converge, puisque le terme général est positif, et à chaque fois équivalent au terme général d'une série "type Riemann".
On a donc l'uniforme convergence des trois séries sur [a,b].
Sur $[a,+\infty)$, cette uniforme convergence est conservée, puisque le sup étant identique, on conserve la convergence normale.
En revanche, sur]0,a] (ou sur $]0,+\infty)$), ça ne marche plus.
En effet : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\lim_{x\to0}u_n(x)=1$.
Puis : $\forall x\in\,]0,a]$, $\forall N\in\mathbb{N}$, $R_N(x)=\sum_{n=N+1}^{+\infty}u_n(x)\geq\sum_{n=N+1}^{2N}u_n(x)=F_N(x)$.
Or la limite en 0 de cette dernière somme (finie) est N.
Donc il existe une valeur : $\alpha>0$, telle que : $\forall\ 0<x<\alpha$, $F_N(x)\geq N/2$.

Conclusion : $\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall 0 < x < \alpha, A \le R_N(x)$, autrement dit la fonction R_N n'est pas bornée sur $]0,a]$ et il ne peut y avoir convergence uniforme sur $]0,a]$.
De même, on démontre que la convergence des deux autres séries n'est pas uniforme sur $]0,a]$.

b. On a immédiatement : $F\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{(n+2)^2} = 4.\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)$, $F(1) = \frac{\pi^2}{6}$, et :

$$F(2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2.n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2.n)^2} = \frac{3}{4}.\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$, en remarquant que la somme demandée est la somme de tous les termes moins la somme des termes d'indice pair.

c. Notons donc, pour : $x > 0$, f_x la fonction définie par : $f_x(t) = \frac{1}{(t.x+1)^2}$.

Alors f_x est décroissante sur $]0,+\infty)$, et :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_n^{n+1} f_x(t).dt \le u_n(x) \le \int_{n-1}^{n} f_x(t).dt$, puis : $\forall N \in \mathbb{N}$, $\int_{N+1}^{+\infty} f_x(t).dt \le R_N(x) \le \int_N^{+\infty} f_x(t).dt$.

Or f_x admet sur $\mathbb{R}^+$ des primitives égales à une constante additive près à : $t \mapsto \frac{-1}{x.(t.x+1)}$.

On en déduit immédiatement la double inégalité demandée.
Notez que cela permet de retrouver la convergence uniforme sur tout $[a,+\infty)$.

d. On a pour commencer :

$$\frac{1}{2.x.(N.x+x+1)} - \frac{1}{2.x.(N.x+1)} \le F(x) - T_N(x) \le \frac{1}{2.x.(N.x+1)} - \frac{1}{2.x.(N.x+x+1)},$$

et on en déduit : $|F(x) - T_N(x)| \le \frac{1}{2.x.(N.x+1).(N.x+x+1)} \le \frac{1}{2.N^2.x^2}$, ceci pour tout : $x > 0$.

On peut alors proposer l'algorithme suivant :

- calculer N plus petit entier tel que : $\frac{1}{2N^2.x^2} \le 10^{-5}$, soit : $N = E\left(\sqrt{\frac{10^5}{2.x^2}}\right) + 1$,
- calculer $S_N(x)$, en utilisant une boucle,
- ajouter les deux fractions complémentaires.

Maple propose les réponses suivantes :

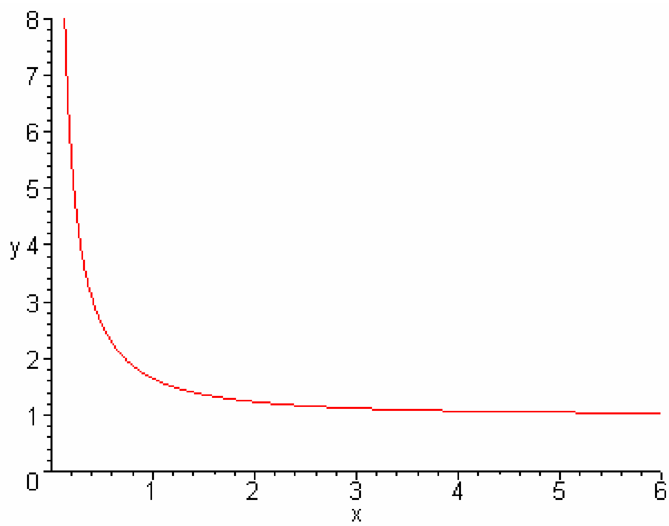
- pour 3 /2 N = 150, $T_n(3/2) \cong 1.36172245$, $F(3/2) \cong 1.3617224041594299600$,
- pour 3 : N = 75, $T_N(3) \cong 1.12173310$, $F(3) \cong 1.1217330139363437869$,
- pour 4 : N = 56, $T_N(4) \cong 1.07483319$, $F(4) \cong 1.0748330721566944212$,
- pour 5 : N = 45, $T_N(5) \cong 1.05069523$, $F(5) \cong 1.0506950882169511649$.

2. a. La convergence uniforme sur tout $[a,b]$ de la série des dérivées et des dérivées secondes permet d'affirmer que F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et qu'on obtient ses dérivées en dérivant terme à terme la série.
Il est clair que F' est négative sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc F y est décroissante, et F'' est positive, donc F est convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b. On peut commencer par garantir que F admet des limites en 0 et en $+\infty$.
En effet, F est décroissante donc elle admet une limite, finie ou non, en 0, et puisque la fonction reste positive, elle admet une limite finie en $+\infty$.
On peut ensuite réutiliser la double inégalité de la question 1.c, pour la valeur : N = 0.
En effet, on a alors :

$$\forall 0 < x, \; 1 + \frac{1}{x.(x+1)} \le F(x) \le 1 + \frac{1}{x}.$$

Il est évident alors, que la limite de F en 0 est $+\infty$, et en $+\infty$, elle vaut 1.
Le tableau de variations en découle.



c. Merci Maple.