Corrigé du Devoir en Temps Libre n°04 (version 2).

Problème (Centrale Supelec PC 2007).

Partie 1.

1. a. Il suffit de dire que la fonction est définie, continue sur ℝ, et qu'elle est négligeable devant x^{-2} en ±∞, ce qui garantit son intégrabilité sur ℝ.

   b. On a donc : $m_1 = 0$, puisque : $\int_{-\infty}^{0} x.f(x).dx = -\int_{+\infty}^{0} (-u).f(u).du = -\int_{0}^{+\infty} u.f(u).du$, d'où :

   $$m_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x).dx = \int_{0}^{+\infty} x.f(x).dx + \int_{-\infty}^{0} x.f(x).dx = 0.$$

   c. On pense ici à une intégration par parties et pour cela, soit donc : n ≥ 2.

   Alors, en partant de m_{n-2} on obtient : $\int_{-\infty}^{+\infty} x^{n-2}.f(x).dx = \left[\frac{x^{n-1}}{n-1}.f(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{n-1}.\int_{-\infty}^{+\infty} x^n.f(x).dx$, puisque d'une part : $f'(x) = -x.f(x)$, et que d'autre part, les deux quantités écrites à droite dans l'égalité existent.

   On en déduit que : $(n-1).m_{n-2} = 0 + m_n$.

   Donc si n est impair, m_n est nul (par récurrence immédiate), et si n est pair, avec : $n = 2.p$, alors :

   $$m_n = m_{2.p} = (2.p-1).m_{2.p-2} = \frac{(2.p)!}{2^p.p!}.m_0 = \frac{(2.p)!}{2^p.p!}.$$

2. Soit : t ∈ ℝ.

   Tout d'abord l'intégrale converge car la fonction sous l'intégrale est définie, continue sur ℝ, et elle est négligeable devant x^{-2} en ±∞.

   En effet : $x^2.e^{-t.x}.f(x) = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}}\exp\left(2.\ln|x| - t.x - \frac{x^2}{2}\right)$, et le théorème des croissances comparées montre que l'argument de l'exponentielle tend vers – ∞ en ±∞.

   Donc l'intégrale proposée est bien convergente.

   Puis on écrit : $-\frac{x^2}{2} - t.x = -\frac{1}{2}.(x+t)^2 + \frac{t^2}{2}$, d'où : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t.x}.f(x).dx = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.e^{\frac{t^2}{2}}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x+t)^2}{2}}.dx$.

   Il suffit alors dans cette intégrale d'effectuer le changement de variable bijectif : $u = x + t$, pour obtenir :

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t.x}.f(x).dx = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.e^{\frac{t^2}{2}}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}.du = e^{\frac{t^2}{2}}.$$

3. a. Puisque dans la somme $f(x)$ est constant, la limite est immédiate et elle vaut : $e^{-t.x}.f(x)$, puisqu'on reconnaît la série de l'exponentielle.

   b. • Les fonctions qui interviennent dans la série sont continues sur ℝ.
   • La série de fonctions converge simplement sur ℝ vers une fonction continue.
   • ∀ t ∈ ℝ, la série des intégrales est à termes positifs et :

   ∀ n ∈ ℕ, $\sum_{k=0}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n.t^n.x^n}{n!}\right|.f(x).dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{t^n.x^n}{n!}\right|.f(x).dx \le \int_{-\infty}^{+\infty} e^{|t.x|}.f(x).dx$ (intégrale convergente).

   La série des intégrales est donc convergente et le théorème de convergence dominée permet d'intervertir intégrale et somme infinie pour obtenir ce qui est demandé.

   c. On en déduit alors que : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t.x}.f(x).dx = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k.m_k.\frac{t^k}{k!} = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^{2.p}.m_{2.p}.\frac{t^{2.p}}{(2.p)!}$, avec les valeurs obtenues à la question 1.

   Et enfin, on obtient : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t.x}.f(x).dx = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(2.p)!}{2^{2p}.p!}.\frac{t^{2.p}}{(2.p)!} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{t^{2.p}}{2^{2p}.p!} = e^{\frac{t^2}{2}}$.

Partie 2.

1. Comme d'habitude, E est inclus dans $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui est un ℝ-espace vectoriel, E est non vide car la fonction nulle a toutes les qualités requises (avec par exemple : M = 0, λ = 1), et :

   ∀ (u,v) ∈ E^2, ∀ (α,β) ∈ $\mathbb{R}^2$, en notant M_u, M_v, λ_u, λ_v leurs constantes associées, on a :

$\forall$ x $\in$ ℝ, $|\alpha.u(x)+\beta.v(x)| \le |\alpha|.M_u.f(\lambda_u.|x|)+|\beta|.M_v.f(\lambda_v.|x|)$, puisque f est paire.

De plus, f est décroissante.

Donc si on note : $\lambda = \min(\lambda_u, \lambda_v) > 0$, et : $M = |\alpha|.M_u + |\beta|.M_v \ge 0$, alors :

$\forall$ x $\in$ ℝ, $|\alpha.u(x)+\beta.v(x)| \le M.f(\lambda.|x|) = M.f(\lambda.x)$.

E est donc bien stable par combinaison linéaire.

Puis : $\forall$ x $\in$ ℝ, $|f(x)| \le 1.f(1.x)$, et donc : f $\in$ E (avec les constantes : M = 1, λ = 1).

2. a. Soit donc : x $\in$ ℝ.
   Alors l'intégrale converge.
   En effet : $\forall$ (x,t) $\in$ ℝ^2, $|u(t).v(x-t)| \le M_u.M_v.f(\lambda_u.t).f(\lambda_v(x-t))$.
   Or : $t^2.f(\lambda_u.t).f(\lambda_v(x-t)) = \exp\left(-\frac{1}{2}.(\lambda_u^2+\lambda_v^2).t^2 + x.t.\lambda_v^2 - \frac{x^2.\lambda_v^2}{2} + 2.\ln|t|\right)$, qui tend vers 0, lorsque t tend vers +∞.
   On obtient bien ainsi l'intégrabilité sur ℝ de la fonction majorante, d'où l'intégrabilité sur ℝ de la fonction : t $\mapsto$ $u(t).v(x-t)$, et l'existence de l'intégrale.
   b. Il suffit, pour x réel fixé, d'effectuer dans l'intégrale le changement de variable bijectif : $u = x-t$, pour obtenir immédiatement l'égalité voulue.
   c. On commence par écrire : $-\frac{t^2}{2} - \frac{(x-t)^2}{2} = -t^2 + x.t - \frac{x^2}{2} = -\left(t-\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}$.
   On utilise alors le changement de variable bijectif : $\frac{u}{\sqrt{2}} = t - \frac{x}{2}$, dans l'intégrale, et :
   $\forall$ x $\in$ ℝ, $(f*f)(x) = e^{-\frac{x^2}{4}}.\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{2.\pi}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}.du = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.e^{-\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.f\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.
   d. Il faut montrer en particulier que $u*v$ est continue sur ℝ.
   Pour cela, soit : A $\in$ ℝ$^{+*}$, et :
   - $\forall$ x $\in$ [-A,+A], t $\mapsto$ $u(t).v(x-t)$, est continue par morceaux (car continue) sur ℝ,
   - $\forall$ t $\in$ ℝ, x $\mapsto$ $u(t).v(x-t)$, est continue sur [-A,+A],
   - $\forall$ (x,t) $\in$ [-A,+A]×ℝ, $|u(t).v(x-t)| \le M_u.M_v.f(\lambda_u.t).f(\lambda_v(x-t)) \le \exp\left(-\frac{1}{2}.(\lambda_u^2+\lambda_v^2).t^2 + A.|t|.\lambda_v^2\right)$,

   et cette fonction majorante, indépendante de x, est intégrable sur ℝ.
   On en déduit que $u*v$ est bien continue sur tout segment [-A,+A], donc sur ℝ.
   Puis on peut alors écrire :
   $\forall$ x $\in$ ℝ, $|(u*v)(x)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} M_u.M_v.f(\lambda_u.|t|).f(\lambda_v.|x-t|).dt \le M_u.M_v.\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda.|t|).f(\lambda.|x-t|).dt$, où on a noté, comme dans la question 1 : $\lambda = \min(\lambda_u, \lambda_v) > 0$.
   Si on utilise alors le changement de variable bijectif : $y = \lambda.t$, dans l'intégrale (puisqu'on peut remplacer $|t|$ par t dans la fonction f tout comme $|x-t|$ par $(x-t)$), alors :
   $\forall$ x $\in$ ℝ, $|(u*v)(x)| \le \frac{M_u.M_v}{\lambda}.\int_{-\infty}^{+\infty} f(y).f(\lambda.x-y).dy = \frac{M_u.M_v}{\lambda}.(f*f)(\lambda.x) = \frac{M_u.M_v}{\lambda}.f\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}.x\right)$.
   C'est bien ce que l'on voulait obtenir sur $u*v$ pour montrer qu'elle appartient à E.
3. a. Pour t réel fixé, la fonction sous l'intégrale qui définit $\hat{u}$ est définie et continue sur ℝ, et :
   $\forall$ x $\in$ ℝ, $|x^2.e^{-t.x}.u(x)| \le \frac{M_u}{\sqrt{2.\pi}}.\exp\left(-\frac{\lambda_u^2.x^2}{4} - x.t + 2.\ln|x|\right)$,
   ce qui montre que la quantité majorée tend vers 0 en ±∞, et que la fonction : x $\mapsto$ $e^{-t.x}.u(x)$, est bien intégrable sur ℝ.
   b. Dans l'intégrale qui définit $\hat{u}$, la fonction F de deux variables qui apparaît est telle que :
   - $\forall$ t $\in$ ℝ, x $\mapsto$ $F(x,t)$, est continue sur ℝ, donc continue par morceaux sur ℝ,
   - $\forall$ x $\in$ ℝ, t $\mapsto$ $F(x,t)$, est continue sur ℝ,

• pour : A ∈ ℝ, on peut majorer $|F(x,t))|$ sur [-A,+A]×ℝ par : $\varphi_A(x) = \frac{M_u}{\sqrt{2.\pi}}.\exp\left(-\frac{\lambda_u^2.x^2}{4} + |x|.A\right)$.

Comme φ_A est intégrable sur ℝ (négligeable devant x^{-2} en ±∞), on en déduit que $\hat{u}$ est continue sur tout segment [-A,+A] inclus dans ℝ donc sur ℝ.
Puis F admet une dérivée partielle par rapport à t qui vérifie les mêmes propriétés et qui sur [-A,+A]×ℝ, se majore par : $\psi_A(x) = |x|.\varphi_A(x)$, toujours intégrable sur ℝ.
Donc $\hat{u}$ est de classe C^1 sur tout segment [-A,+A] inclus dans ℝ, donc sur ℝ et on la calcule en dérivant F sous l'intégrale.
L'obtention de $\hat{u}''$ procède de la même méthode.
Finalement : ∀ t ∈ ℝ, $\hat{u}'(t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x.e^{-t.x}.u(x).dx$, $\hat{u}''(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.e^{-t.x}.u(x).dx$.

4. a. Le problème revient à prouver l'existence d'une constante a telle que :
∀ (x,t) ∈ $\mathbb{R}^2$, $0 \le (1-a).x^2 - 2.x.t + (2-a).t^2$.
Si t est nul, on constate qu'il est nécessaire que : a < 1.
Puis, pour t non nul, cela revient, en posant : $y = \frac{x}{t}$, à : ∀ y ∈ ℝ, $0 \le (1-a).y^2 - 2.y + (2-a)$
Or un trinôme reste positif sur ℝ si et seulement si son discriminant est négatif ou nul.
Comme ce discriminant vaut : $4.(-a^2 + 3.a - 1)$, a répond au problème si et seulement si :
($a < 1$, et : $a^2 - 3.a + 1 > 0$).
Une étude rapide de la fonction du second degré montre qu'un tel a existe, puisqu'elle vaut 1 en 0.

b. On commence par : ∀ (x,t) ∈ $\mathbb{R}^2$, $|u(t).v(x-t)| \le \frac{M_u.M_v}{2.\pi}.\exp\left(\frac{1}{2}.[-\lambda_u.x^2 - \lambda_v.(x-t)^2]\right)$.
En prenant : $\lambda = \frac{\min(\lambda_u, \lambda_v)}{2}$, on obtient : ∀ (x,t) ∈ $\mathbb{R}^2$, $|u(t).v(x-t)| \le K.\exp\left(\lambda.[-x^2 - (x-t)^2]\right)$.
La valeur a de la question précédente donne alors : ∀ (x,t) ∈ $\mathbb{R}^2$, $|u(t).v(x-t)| \le K.e^{-a.x^2}.e^{-a.t^2}$.
On peut alors appliquer la propriété admise en préambule, puisque les fonctions de x et de t qui apparaissent sont intégrables sur ℝ.
On écrit donc : ∀ x ∈ ℝ, $\int_{-\infty}^{+\infty} u * v(x).dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u(t).v(x-t).dt.dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} u(t).v(x-t).dx.dt$.
Or on peut alors sortir $u(t)$ de l'intégrale centrale et effectuer un changement de variable : $y = x - t$, dans ce qui apparaît, pour obtenir :
∀ x ∈ ℝ, $\int_{-\infty}^{+\infty} u * v(x).dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t).\left(\int_{-\infty}^{+\infty} v(x-t).dx\right).dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t).\left(\int_{-\infty}^{+\infty} v(y).dy\right).dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t).dt.\int_{-\infty}^{+\infty} v(y).dy$.

c. On commence par majorer, pour : (x,t,θ) ∈ $\mathbb{R}^3$, la quantité $e^{-x.\theta}.|u(t).v(x-t)|$ par une exponentielle.
Si on développe la majorant, on s'aperçoit que l'argument de l'exponentielle s'écrit :
$-\frac{1}{2}.[2.x.\theta + \lambda_u.t^2 + \lambda_v.(x-t)^2] \le -\gamma.\left[t^2 + (x-t)^2 + \frac{\theta.x}{\gamma}\right]$, où on a posé : $2.\gamma = \min(\lambda_u, \lambda_v)$.
L'expression proposée permet alors de majorer l'exponentielle par un produit de fonctions de x et de t, continues et intégrables sur ℝ. On peut donc intervertir l'ordre d'intégration et aboutir à :
∀ θ ∈ ℝ, $\hat{w}(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x.\theta}.u(t).v(x-t).dt\right).dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t).\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x.\theta}.v(x-t).dx\right).dt$.
On change alors x en : $y = x - t$, et : ∀ θ ∈ ℝ, $\hat{w}(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t).e^{-t.\theta}.\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y.\theta}.v(y).dy\right).dt = \hat{u}(\theta).\hat{v}(\theta)$.

Partie 3.

1. a. Tout d'abord, on obtient par récurrence que tous les termes de la suite sont dans E, d'après II.2.d.
Puis la question II.4.b montre, également par récurrence, que tous les termes sont dans E_1.
b. La question II.4.c donne dans ce cas que :
∀ n ∈ ℕ*, ∀ x ∈ ℝ, $\hat{h}_{n+1}(x) = \hat{h}_n(x).\hat{h}_1(x)$, d'où immédiatement : ∀ n ∈ ℕ*, $\hat{h}_n = (\hat{h}_1)^n$.

2. a. Comme f est dans E_1 d'après l'introduction, la suite (f_n) a un sens.

A la question II.2.c, on a obtenu que : $\forall$ x $\in$ ℝ, $f_2(x) = (f * f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}.f\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$, soit : $K_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2.\pi}}$.

b. Pour : n = 2, le résultat est acquis, et si on le suppose vrai pour un n donné, alors en s'inspirant de la question II.2.c, on peut écrire : $-\frac{1}{2}.\left[\frac{t^2}{n} + (x-t)^2\right] = -\frac{1}{2}.\left[\left(t.\sqrt{\frac{n+1}{n}} - x.\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)^2 + \frac{x^2}{n+1}\right]$.

On utilise alors le changement de variable bijectif : $u = \left(t.\sqrt{\frac{n+1}{n}} - x.\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)$, et :

$\forall$ x $\in$ ℝ, $f_{n+1}(x) = K_n.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}.e^{-\frac{x^2}{2.(n+1)}}.\sqrt{\frac{n}{n+1}}.dt = K_n.\sqrt{\frac{n}{n+1}}.e^{-\frac{x^2}{2.(n+1)}}$.

On obtient donc bien ce qu'on veut, avec : $K_{n+1} = K_n.\sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.\frac{1}{\sqrt{2.\pi}}$, par récurrence.

c. Les questions I.2 et III.2.b donnent :

$\forall$ t $\in$ ℝ, $\hat{f}_1(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$, et : $\forall$ n $\in$ ℕ*, $\hat{f}_n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\hat{f}_1\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(e^{\frac{t^2}{2.n}}\right)^n = e^{\frac{t^2}{2}}$, d'où : $\lim_{n\to+\infty} \hat{f}_n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = e^{\frac{t^2}{2}}$.

3. a. Puisque g est nulle en dehors d'un segment, il est immédiat que g est dans E, et comme son intégrale sur ℝ vaut 1, elle est dans E_1.

b. Comme g est paire, on écrit successivement :

$\forall$ x $\in$ ℝ, $(g * g)(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t).g(-x-t).dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t).g(x+t).dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y).g(x-y).dy = (g * g)(x)$.

Soit alors : x $\geq$ 0.

Pour : x $\geq \pi$, on a :

- $\forall$ t $\in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, $x - t \geq \frac{\pi}{2}$, et : $g(x-t) = 0$,
- $\forall$ t $\notin \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, $g(t) = 0$.

Donc dans ce cas : $(g * g)(x) = 0$.

Pour : x $\in$ [0,π], on restreint t à $\left[x - \frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, et en linéarisant le produit de cosinus, on obtient :

$(g * g)(x) = \frac{1}{8}.[(\pi - x).\cos(x) + \sin(x)]$.

c. Tout d'abord, g est dans E_1, puis on travaille par récurrence, puisque le résultat est obtenu pour : n = 1. Ensuite si on suppose g_n nulle en dehors de $[-a_n, +a_n]$, alors quand on calcule g_{n+1}, il faut que $(x-t)$ soit dans cet intervalle donc que t se trouve dans $[x - a_n, x + a_n]$ pour que le cosinus correspondant soit non nul.

Mais comme t doit aussi être dans $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, pour que l'autre cosinus ne s'annule pas, cela impose à x d'être dans $\left[a_n - \frac{\pi}{2}, a_n + \frac{\pi}{2}\right]$ pour que les deux intervalles aient une intersection non vide.

Autrement dit, g_{n+1} est nulle en dehors de $[-a_{n+1}, +a_{n+1}]$, avec : $a_{n+1} = (n+1).\frac{\pi}{2}$, par récurrence.

d. On ramène l'intégrale à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, puis on passe tout en exponentielles pour obtenir :

$\forall$ t $\in$ ℝ, $\hat{g}(t) = \frac{1}{t^2+1}.ch\left(\frac{t.\pi}{2}\right)$.

e. On écrit alors : $\hat{g}_n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=\left[\hat{g}_1\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n=\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}.e^{n.\ln\left(ch\left(\frac{t.\pi}{2.\sqrt{n}}\right)\right)}$.

A l'aide de développements limités en 0, on obtient finalement : $\lim_{n\to+\infty}\hat{g}_n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=e^{t^2.\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right)}$.

Partie 4.

1. a. La question II.3.b a montré que tout élément de E est de classe C^2 sur ℝ, donc pour tout : n ∈ ℕ*, $\hat{h}_n$ est de classe C^2 sur ℝ, et à ce titre possède un développement limité à l'ordre 2 en 0, qui vaut :

   ∀ x ∈ ℝ, $\hat{h}_n(x)=\hat{h}_n(0)+x.\hat{h}_n'(0)+\frac{x^2}{2}.\hat{h}_n''(0)+o_0(x^2)$.

   Or : $\hat{h}_n(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}h_n(t).dt=1$, $\hat{h}_n'(0)=-\int_{-\infty}^{+\infty}x.h_n(t).dt=-M_{1,n}$, et : $\hat{h}_n''(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2.h_n(t).dt=M_{2,n}$.

   Soit : ∀ x ∈ ℝ, $\hat{h}_n(x)=1-M_{1,n}.x+M_{2,n}.\frac{x^2}{2}+o_0(x^2)$.

   b. Il suffit alors d'écrire que : $\hat{h}_n(x)=(\hat{h}_1)^n(x)=\left(1-M_{1,1}.x+M_{2,1}.\frac{x^2}{2}+o_0(x^2)\right)^n$, et de développer à l'aide de $(1+u)^n$ pour aboutir à : $M_{1,n}=n.M_{1,1}$, et : $M_{2,n}=n.M_{2,1}+n.(n-1).M_{1,1}^2$.

   D'où en particulier : $V_n=M_{2,n}-M_{1,n}^2=n.M_{2,1}+n.M_{1,1}^2=n.V_1$.

2. On reprend alors le développement limité de $\hat{h}_1$ en 0 et :

   ∀ n ∈ ℕ, $\hat{h}_n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=\left(\hat{h}_1\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n=\left(1+\frac{t^2}{2.n}.M_{2,1}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$, qui tend vers $e^{\frac{t^2}{2}.M_{2,1}}$, en +∞.

   Ce résultat est en accord avec ce qu'on a trouvé à la question III.2.c, puisque dans ce cas : $M_{1,1}=m_1=0$, et : $M_{2,1}=m_2=1$.

   De même pour la question III.3.e, car g étant paire, on a : $M_{1,1}=0$, et on calcule : $M_{2,1}=\frac{\pi^2}{4}-2$.