Corrigé du Devoir en Temps Libre n°04.

Exercice 1 (ESC Lyon option économique 2003).

1. En utilisant la forme matricielle, on obtient immédiatement :

$$f_n((x, y, z)) = \left(x + \frac{y}{n} + \frac{z}{n}, -\frac{x}{n} + \frac{(n+2).y}{n} + \frac{z}{n}, \frac{x}{n} - \frac{y}{n} + z\right).$$

2. a. On constate par le calcul que : $f(u) = u$, $f(v) = \left(1 + \frac{1}{n}\right).v$, $f(w) = \left(1 + \frac{1}{n}\right).w$.

   b. On peut par exemple étudier une combinaison linéaire nulle de ces trois vecteurs ou calculer le déterminant de la matrice de leurs coordonnées dans la base canonique.
   Cette matrice a pour déterminant 1, donc la famille est libre en dimension 3.
   C'est donc bien une base de $\mathbb{R}^3$.

   c. En exprimant en colonnes les coordonnées des images des vecteurs de la base en question dans cette même base, on obtient la matrice D_n cherchée à savoir : $D_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+1/n & 0 \\ 0 & 0 & 1+1/n \end{pmatrix}$.

   On constate alors que : $D_n = I + \frac{1}{n}.H$, où : $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Or cette matrice est bien la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$ puisqu'elle vérifie : $H^2 = H$.

3. a. Calculons les premières matrices : $D_1 = I + H$, $D_1.D_2 = (I + H).(I + H/2) = I + 2.H$, puisque : $H^2 = H$.
   De même : $D_1.D_2.D_3 = I + 3.H$.
   Montrons alors par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $D_1 \ldots D_n = I + n.H$.
   Le résultat vient d'être vu pour : $n = 1$.
   Soit : $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons l'égalité précédente vraie pour ce n.
   Alors : $D_1 \ldots D_{n+1} = (I + n.H).(I + H/(n+1)) = I + n.H + H/(n+1) + (n/(n+1)).H^2 = I + (n+1).H$, toujours en utilisant le fait que : $H^2 = H$.
   On a donc bien établi le résultat annoncé.

   b. Puisque on peut constater ensuite que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Pi_n = P.D_1 \ldots D_n.P^{-1}$, où P est la matrice de passage de la base canonique à la base (u, v, w), on a donc :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Pi_n = P.(I + n.H).P^{-1}$.

   Précisons alors P et P^{-1} : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, de manière classique.

   Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Pi_n = P.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+n & 0 \\ 0 & 0 & 1+n \end{pmatrix}.P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ -n & 1+n & n \\ n & -n & 1 \end{pmatrix}$.

4. La matrice $D_1 \ldots D_n$ étant de rang 3 pour tout n non nul, et son inverse vaut :

$$(D_1 \ldots D_n)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/(1+n) & 0 \\ 0 & 0 & 1/(1+n) \end{pmatrix} = I - \frac{n}{n+1}.H.$$

   On en déduit que Π_n est inversible, d'inverse : $P.\left(I - \frac{n}{n+1}.H\right).P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-n}{1+n} & \frac{-n}{1+n} \\ \frac{n}{1+n} & \frac{1-n}{1+n} & -\frac{n}{1+n} \\ \frac{-n}{1+n} & \frac{n}{1+n} & 1 \end{pmatrix}$.

Problème (ENGEES PC 2000 (corrigé).

1. a. Il suffit de dire que la famille comporte (n+1) polynômes (soit autant que la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$) et qu'ils sont de degrés étagés, donc qu'ils constituent une famille libre.
   b. On traite à part N_0.
   - $\Delta(N_0) = 1 - 1 = 0$,
   - $\forall$ k ≥ 1, $\Delta(N_k) = \dfrac{1}{k!}\left[\prod_{i=0}^{k-1}(X+1-i) - \prod_{i=0}^{k-1}(X-i)\right] = \dfrac{1}{k!}\left[\prod_{i=-1}^{k-2}(X-i) - \prod_{i=0}^{k-1}(X-i)\right]$, soit :

$$\Delta(N_k) = \frac{1}{k!}.(X+1-(X-k+1)).\prod_{i=0}^{k-2}(X-i) = \frac{1}{(k-1)!}.\prod_{i=0}^{k-2}(X-i) = N_{k-1}.$$

2. L'application est bien de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même, et elle est évidemment linéaire.
   Il y a plusieurs façons de traiter noyau et image.
   On peut remarquer d'abord qu'un polynôme P de degré n non nul a une image de degré (n – 1), car :
   $(P = \alpha_0.N_0 + \ldots + \alpha_n.N_n) \Rightarrow (\Delta(P) = \alpha_1.N_0 + \ldots + \alpha_n.N_{n-1})$.
   Donc si P est dans le noyau de Δ, il doit être constant.
   Réciproquement, un polynôme constant a bien une image nulle.
   L'implication précédente montre par ailleurs que si : $Q = \beta_0.N_0 + \ldots \beta_n.N_n$, alors Q est l'image par Δ du polynôme : $P = \beta_0.N_1 + \ldots + \beta_n.N_{n+1}$ par exemple.
   On conclut avec : $\ker(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]$, $\mathrm{Im}(\Delta) = \mathbb{R}[X]$.
3. a. La remarque précédente sur le degré d'un polynôme image garantit que tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ a une image de degré inférieur à n.
   Cela prouve bien la stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$ par Δ.
   b. Le noyau de Δ_n est inclus dans le noyau de Δ (puisque si : $\Delta_n(P) = 0$, alors : $\Delta(P) = 0$).
   Mais pour tout entier n, $\mathbb{R}_0[X]$ est inclus dans $\mathbb{R}_n[X]$. Donc : $\ker(\Delta_n) = \mathbb{R}_0[X]$.
   Le théorème du rang peut maintenant servir.
   En effet, Δ_n est de rang n (soit : $\dim(\mathbb{R}_n[X]) - 1$).
   De plus : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\Delta_n(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et : $\mathrm{Im}(\Delta_n) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   Donc : $\mathrm{Im}(\Delta_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (sauf évidemment si : n = 0, où on a : $\mathrm{Im}(\Delta_0) = \{0\}$).
   c. Le calcul de la question 1 donne immédiatement la matrice cherchée :

$$\mathrm{mat}(\Delta_n,N) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

   Pour établir l'égalité suivante, on peut remarquer que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg(\Delta_n(P)) \leq \deg(P) - 1$, donc par récurrence immédiate : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\forall 1 \leq j \leq n$, $\deg((\Delta_n)^j(P)) \leq \deg(P) - j$.
   Donc : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg((\Delta_n)^n(P)) \leq 0$, et : $(\Delta_n)^n(P) \in \ker(\Delta_n)$.
   Soit finalement : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $(\Delta_n)^{n+1}(P) = 0$, puis : $(\Delta_n)^{n+1} = 0$.
   d On peut ici raisonner matriciellement, autrement dit, chercher les matrices qui commutent avec la matrice de la question 3.c., ce qui donnera (par l'intermédiaire de leur matrice représentative dans la base N, les endomorphismes cherchés).
   Notons pour cela A_n la matrice précédente et B une matrice quelconque.

$$\text{Alors : } (A_n.B = B.A_n) \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n-1} \\ 0 & b_{21} & \cdots & b_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn-1} \end{pmatrix}\right).$$

   La dernière égalité est équivalente à :
   - $b_{21} = b_{31} = \ldots = b_{n1} = 0$,
   - $b_{11} = b_{22} = \ldots = b_{nn}$,
   - sur toutes les diagonales parallèles à la diagonale principale, les termes de B sont égaux.

Autrement dit, B s'écrit : $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{12} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} \end{pmatrix} = b_{11}.I_n + ... + b_{1n}.\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Or, toujours à l'aide de la base $(N_0, \ldots, N_n)$, il est clair que les différentes matrices qui interviennent alors sont celles de Δ_n^0, Δ_n, …, Δ_n^n, puisque par exemple :

- $\forall\ 1 \le j \le k - 1$, $\Delta_n^k(N_j) = 0$, $\forall\ k \le j \le n$, $\Delta_n^k(N_j) = N_{j-k}$.

Donc : $(u \in C_n) \Leftrightarrow (u \in \mathrm{Vect}(id_{\mathbb{R}n[X]}, \Delta_n, \ldots, \Delta_n^n))$.

Enfin, puisque leurs matrices représentatives dans la base $(N_0, \ldots, N_n)$ sont libres, les endomorphismes précédents constituent bien une base de C_n qui est donc bien de dimension (n+1).

e. Soit : $u \in R_n$.

Alors u ne peut être bijectif car sinon uou le serait aussi et donc également Δ_n ce qui n'est pas le cas.
Donc le noyau de u est au moins de dimension 1.
De plus, le noyau de uou contient celui de u de manière immédiate et c'est celui de Δ_n qui est aussi de dimension 1.
Donc : $\ker(u) \subset \ker(uou) = \ker(\Delta_n)$, et étant de même dimension, ils sont égaux.
Mais alors : $\forall\ k \ge 1$, $\ker(u^k) = \ker(u)$. En effet :

- ce résultat est vrai pour : k = 1.
- supposons le vrai pour une valeur : $k \ge 1$, donnée.
  Alors on a déjà : $\ker(u^k) \subset \ker(u^{k+1})$, et : $\forall\ x \in \ker(u^{k+1})$, $u^{k+1}(x) = 0$, donc : $u^{k-1}(x) \in \ker(u^2) = \ker(u)$, et : $u(u^{k-1}(x)) = 0$, soit : $x \in \ker(u^k)$.
  on en déduit donc bien que : $\ker(u^{k+1}) = \ker(u^k) = \ker(u)$.

Mais comme : $\Delta_n^{n+1} = 0$, on en déduit que : $u^{2n+2} = 0$, et : $\ker(u^{2n+2}) = \mathbb{R}_n[X] = \ker(u)$.
Or ce dernier noyau est de dimension 1.
Conclusion :

- si n est différent de 0, alors u n'existe pas et : $R_n = \varnothing$,
- si n est nul, alors la seule possibilité est : u = 0, et cet endomorphisme convient : $R_n = \{0\}$.

4. a. On sait que tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ se décompose suivant la base $(N_0, \ldots, N_n)$.

Soit donc : $P \in \mathbb{R}_n[X]$, et : $P = \alpha_0.N_0 + \ldots + \alpha_n.N_n$.
Appliquons alors Δ_n^j à ce polynôme, pour : $0 \le j \le n$.
Alors : $\Delta_n^j(P) = \alpha_0.\Delta_n^j(N_0) + \ldots + \alpha_n.\Delta_n^j(N_n) = \alpha_0.0 + \ldots + \alpha_j.N_0 + \ldots \alpha_n.N_{n-j}$, d'après la question 3.e.
Si maintenant on calcule la valeur en 0 de ce polynôme, on obtient : $\alpha_j = \Delta_n^j(P)(0)$, puisque tous les polynômes N_k s'annulent en 0 sauf N_0 qui vaut 1.
Cela donne bien le résultat demandé.

b. On peut démontrer cette égalité par récurrence sur j.

Pour cela, le résultat est vrai pour : j = 0.
Supposons-le vrai pour : $0 \le j \le n - 1$. Alors :

$$\Delta^{j+1}(P) = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k}.(-1)^{j+k}.\Delta(P(X+k)) = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k}.(-1)^{j+k}.[P(X+k+1) - P(X+k)].$$

Il suffit alors de couper la somme en deux parties et de réindexer la première :

$\Delta^{j+1}(P) = \sum_{k=1}^{j+1} \binom{j}{k-1}.(-1)^{j+k-1}.P(X+k) - \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k}.(-1)^{j+k}.P(X+k)$, ou encore :

$$\Delta^{j+1}(P) = P(X+j+1) + \sum_{k=1}^{j} \left[\binom{j}{k-1} + \binom{j}{k}\right].(-1)^{j+k-1}.P(X+k) - (-1)^j.P(X) = \sum_{k=0}^{j+1} \binom{j+1}{k}.(-1)^{j+1+k}.P(X+k).$$

Le résultat est donc bien vérifié pour tout : $0 \le j \le n$.

c. L'équivalence ne pose alors plus de problème.

En effet, soit : $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

- si : $\forall\ k \in \mathbb{Z}$, $P(k) \in \mathbb{Z}$, alors la question 4.b. montre que :
  $\forall\ 0 \le j \le n$, $\Delta^j(P)(0) \in \mathbb{Z}$, et :
  $\forall\ (n+1) \le j$, $\Delta^j(P) = \Delta_n^j(P) = 0$, d'où : $\Delta^j(P)(0) = 0 \in \mathbb{Z}$.
- si : $\forall\ j \in \mathbb{N}$, $\Delta^j(P)(0) \in \mathbb{Z}$, alors : $\forall\ k \in \mathbb{Z}$, $P(k) = \sum_{j=0}^{k} \Delta^j(P)(0).N_j(k)$. Or :

si : $0 \le k \le j - 1$, alors k est racine de N_j et : $N_j(k) = 0 \in \mathbb{Z}$, si : k < 0, avec : k = – p, $N_j(k) = (-1)^j.\dfrac{p.(p+1)...(p+j-1)}{j!} = (-1)^j.\dfrac{(p+j-1)!}{j!.(p-1)!} = (-1)^j.\begin{pmatrix} p+j-1 \\ j \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}$,

si : $j \le k$, $N_j(k) = \dfrac{k.(k-1)...(k-j+1)}{j!} = \dfrac{k!}{j!.(k-j)!} = \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}$.

Dans tous les cas on a donc bien : $\forall$ k $\in \mathbb{Z}$, P(k) $\in \mathbb{Z}$.

5. a. Soit : i $\in \mathbb{N}$. Puisque : Im(Δ) = $\mathbb{R}$[X], le polynôme X^i a un antécédent par Δ, ou encore :
$\exists$ $Q_i \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\Delta(Q_i) = X^i$.
Si de plus un autre polynôme R_i est antécédent de X^i par Δ, alors : $(Q_i - R_i) \in \ker(\Delta)$, donc $(Q_i - R_i)$ est constant.
Donc toute solution de la première partie du problème s'écrit : $R_i = Q_i + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Si enfin on veut que le polynôme cherché s'annule en 0, alors on doit avoir : $R_i(0) = 0$, ou : $\alpha = -Q_i(0)$.
Donc il n'y a qu'une seule solution possible : $B_i = Q_i - Q_i(0)$.
Réciproquement, un tel polynôme B_i convient comme on le vérifie immédiatement.

b. Ecrivons par exemple :
• $X^0 = 1 = \Delta^0(1)(0).N_0 = N_0 = \Delta(N_1)$, donc B_0 s'écrit : $N_1 + \alpha$, et s'annule en 0, soit : $B_0 = N_1 = X$.
De même :
• $X^1 = X = \Delta^0(X)(0).N_0 + \Delta^1(X)(0).N_1 = N_1 = \Delta(N_2)$, donc : $B_1 = N_2 + \alpha$, et : $\alpha = 0$.
D'où : $B_1 = \dfrac{X.(X-1)}{2}$.
Puis en raisonnant de la même façon, on trouve : $X^2 = N_1 + 2.N_2 = \Delta(N_2 + 2.N_3)$, et :
• $B_2 = 2.N_3 + N_2 = \dfrac{X.(X-1).(2X-1)}{6}$, et :
• $X^3 = N_1 + 6.N_2 + 6.N_3 = \Delta(N_2 + 6.N_3 + 6.N_4)$, $B_3 = N_2 + 6.N_3 + 6.N_4 = \dfrac{X^2.(X-1)^2}{4}$.

c. En utilisant la question précédente : $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3 = \sum\limits_{k=0}^{n} [B_3(k+1) - B_3(k)] = B_3(n+1) - B_3(0) = \dfrac{n^2.(n+1)^2}{4}$.

<u>Exercice 3 (E3A MP 2002 extrait (corrigé).</u>

1. a. Tout d'abord, chaque fonction φ_i est bien continue sur [a,b], puisqu'elle est affine sur $[a,a_i]$ où elle vaut : $\forall$ x $\in [a,a_i]$, $\varphi_i(x) = a_i - x$, et sur $[a_i,b]$, où elle vaut : $\forall$ x $\in [a_i,b]$, $\varphi_i(x) = x - a_i$.
Quant à la continuité en a_i, elle est garantie par le fait que les fonctions à droite et à gauche de a_i ont même limite en a_i.
De plus, les expressions précédentes montrent que φ_i est affine sur tous les intervalles $[a_i, a_{i+1}]$.
Donc, finalement, φ_i appartient bien à E.

b. Puisque l'on impose à δ_i des valeurs aux points a_j, on l'impose en fait sur tous les sous-intervalles.
En effet, f affine sur [α,β] et : f(α) = A, f(β) = B, donne comme seule possibilité :
$\forall$ x $\in$ [α,β], f(x) = A + $\dfrac{x-a}{b-a}.[B-A]$, comme le montre un rapide calcul.
Donc δ_i ne peut prendre qu'une seule forme sur chaque intervalle, ce qui montre l'unicité d'une solution au problème.
Réciproquement, la fonction δ_i définie par chaque morceau convient.
En effet, elle est évidemment affine sur chaque sous-intervalle, donc affine sur chaque sous-intervalle ouvert, et continue en chaque a_i, comme on le vérifie immédiatement avec les limites à droite et à gauche de chaque fonction affine ainsi obtenue.
Finalement, il existe une unique fonction δ_i de E vérifiant : $\forall$ j $\in$ {0,…,n}, $\delta_i(j) = \delta_{i,j}$.
Remarque : elle vaut 0 sur tout intervalle $[a_j, a_{j+1}]$, pour : $j \le i - 2$, et : $j \ge i + 1$, puis elle vaut :
$\delta_i(x) = \dfrac{x - a_{i-1}}{a_i - a_{i-1}}$, sur $[a_{i-1}, a_i]$ et : $\delta_i(x) = 1 - \dfrac{x - a_i}{a_{i+1} - a_i}$, sur $[a_i, a_{+1}]$.

2. a. Sur tout intervalle de $\mathbb{R}$, une combinaison linéaire de fonctions affines reste une fonction affine.
De même, une combinaison linéaire de fonctions continues est encore une fonction continue.
Donc :
E est non vide (il contient la fonction nulle qui est continue sur [a,b] et affine sur chaque $[a_i,a_{+1}]$),
E est inclus dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur [a,b],
une combinaison linéaire d'éléments de E est encore un élément de E vu les remarques préliminaires.

Finalement, E est un sous-espace vectoriel de C([a,b]).

b. Montrons que la famille est libre :
soit : $\alpha_0.\delta_0 + \ldots + \alpha_n.\delta_n = 0$, pour : $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
Cette égalité de fonctions sur [a,b] donne donc une égalité scalaire pour tout : $x \in [a,b]$.
En particulier : $\forall\ 0 \le j \le n$, $\alpha_j.1 + 0 = 0$, donc : $\alpha_j = 0$.
Montrons qu'elle est génératrice de E et pour cela, soit : $\varphi \in E$.
Si φ peut s'écrire comme une combinaison linéaire du type précédent, alors là encore en évaluant l'égalité en toutes les valeurs a_j, on obtient : $\forall\ 0 \le j \le n$, $\varphi(a_j) = \alpha_j$.
Donc la combinaison linéaire cherchée ne peut être que : $\psi = \sum_{j=0}^{n} \varphi(a_j).\delta_j$.
Réciproquement, vérifions ψ coïncide bien avec φ sur [a,b].
Il est clair que φ et ψ prennent les mêmes valeurs en tous les points a_j.
Mais ces deux fonctions sont affines sur chaque $[a_j, a_{j+1}]$, donc d'après le remarque préliminaire (question 1.b) elles coïncident sur tous les intervalles $[a_j,a_{j+1}]$ puisqu'il n'y a qu'une seule fonction affine prenant des valeurs données aux bornes d'un intervalle.
Finalement, on a bien : $\varphi = \psi$, et la famille est génératrice de E.
Remarque : le fait que la décomposition soit unique rend la démonstration de la liberté superflue.
Donc B est bien une base de E.

c. Puisqu'il y a (n+1) vecteurs dans cette deuxième famille, il suffit de démontrer qu'elle est libre.
Partons donc d'une combinaison linéaire nulle : $\psi = \alpha_0.\varphi_0 + \ldots + \alpha_n.\varphi_n = 0$, fonction nulle sur [a,b].
Supposons α_i non nul, pour un i entre 1 et (n – 1).
Alors la combinaison linéaire précédente s'écrit sur $]a_{-1}, a_{i+1}[$:
$\forall\ x \in\ ]a_{i-1}, a_{i+1}[$, $\psi(x) = \alpha_0.(x - a_0) + \ldots + \alpha_{i-1}.(x - a_{i-1}) + \alpha_i.|x - a_i| + \alpha_{i+1}.(a_{i+1} - x) + \ldots + \alpha_n.(a_n - x)$.
Or si donc α_i est non nul, alors cette fonction est non dérivable en a_i, alors qu'elle est doit être nulle.
C'est donc impossible et : $\alpha_i = 0$.
Reste α_0 et α_n, soit : $0 = \alpha_0.|x - a_0| + \alpha_n.|x - a_n|$, $\forall\ x \in [a,b]$, avec : $a = a_0$, $b = a_n$.
Donc : $\varphi(a_0) = \alpha_0.(b - a) = 0$, et : $\alpha_0 = 0$. De même : $\alpha_n = 0$, avec la valeur en b.
Finalement, la famille est bien libre, et c'est donc une base de E.

3. Si α, β, γ existent, alors :
$\beta.(v - u) + \gamma.(w - u) = g(u) = 0$, car g est nulle sur $(-\infty, u]$.
$\alpha.(v - u) + \gamma.(w - v) = g(v) = 1$,
$\alpha.(w - u) + \beta.(w - v) = g(w) = 0$, car g est nulle sur $[w,+\infty)$.
On est donc amené à résoudre un système de trois équations à trois inconnues, dont le triplet solution est : $\alpha = \dfrac{1}{2.(v-u)}$, $\beta = \dfrac{w-u}{2.(w-v).(u-v)}$, $\gamma = \dfrac{1}{2.(w-v)}$.
Réciproquement, considérons : $\varphi(x) = \alpha.|x - u| + \beta.|x - v| + \gamma.|x - w|$, pour : $x \in \mathbb{R}$.
La fonction φ est affine sur chaque intervalle : $(-\infty,u]$, $[u,v]$, $[v,w]$, $[w,+\infty)$.
Comme elle vaut 0 en u, 1 en v et 0 en w, elle coïncide avec g sur [u,v] et [v,w], toujours d'après la remarque de la question 1.b.
Restent les deux autres intervalles.
Or : $\forall\ x < u$, $\varphi(x) = \alpha.(u - x) + \beta.(v - x) + \gamma.(w - x) = \dfrac{(u-x).(w-v)-(v-x).(w-u)+(w-x).(v-u)}{2.(w-v).(v-u)}$, et on constate que cette expression est nulle.
On vérifie de même que sur $[w,+\infty)$ $\varphi(x)$ reste également nulle.
Conclusion : g et φ coïncident sur $\mathbb{R}$, et on a bien résolu le problème posé.

4. a. Il suffit d'exprimer chaque φ_j dans la base $\mathscr{B}$.
Mais les coordonnées de φ_j sont dans cette base : $(|a_j - a_i|)_{0 \le i \le n}$.
Donc la matrice de passage cherchée est celle dans laquelle on place en colonnes ces valeurs.
En particulier il n'y a que des 0 sur la diagonale.

b. Pour f donnée, on cherche donc ses coordonnées dans la base $\mathscr{C}$, et on les connaît dans la base $\mathscr{B}$ puisque ce sont les valeurs $(f(a_0), \ldots, f(a_n))$.
Appelons P la matrice de passage précédente, et notons X la matrice des coordonnées de f cherchée.
Alors : $F = \begin{pmatrix} f(a_0) \\ \vdots \\ f(a_n) \end{pmatrix} = P.X$.

Il suffirait donc de calculer P^{-1} pour obtenir : $X = P^{-1}.F$.

5. a. La matrice P vaut : $P = (b-a).\begin{pmatrix} 0 & 1/n & \cdots & n/n \\ 1/n & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1/n \\ n/n & \cdots & 1/n & 0 \end{pmatrix} = \frac{b-a}{n}.\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ n & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour calculer le déterminant de cette dernière matrice on peut enlever à chaque colonne la suivante en commençant par la première.

Puis dans ce nouveau déterminant, ajouter à chaque ligne la première.

On aboutit au déterminant triangulaire suivant : $T = \begin{vmatrix} -1 & * & \cdots & * & n \\ 0 & -2 & \ddots & \vdots & 2n-1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & * & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -2 & n+1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} = (-1)^n.n.2^{n-1}$.

Finalement : $\det(P) = \dfrac{(-1)^n.2^{n-1}.(b-a)^{n+1}}{n^n}$.

b. C'est en fait le résultat donné dans la question 3 : on prend : $\alpha = -\beta/2 = \gamma = \dfrac{n}{2.(b-a)}$.

c. Sur chacune de ces colonnes, tous les termes sont nuls sauf 3 (autour de la diagonale) qui sont α, β, γ.

d. Manquent C_0 et C_n.

L'idée qu'on peut avoir est de remplacer $|x - a_{-1}|$ qui ici n'existe pas par la fonction : $x \mapsto |x - a_n|$ dont l'intérieur ne change pas de signe dans l'intervalle [a,b].

On peut aussi y penser à l'aide d'un essai pour un n donné et Maple.

On trouve alors, en imposant : $\delta_0(a_n) = 0$, et : $\delta_n(a_0) = 0$, comme troisième condition :

$\delta_0 = (1-n)/2n.\varphi_0 + 1/2.\varphi_1 + 1/2n.\varphi_n$, ce qui donne C_0, et :

$\delta_n = 1/2n.\varphi_0 + 1/2.\varphi_{n-1} + (1-n)/2n.\varphi_n$, ce qui donne enfin C_n et termine la détermination de P^{-1}.

Exercice 4 (ENSAE 1995).

1. Commençons par remarquer que :

   $\forall x \in E, x \neq 0$, (x, u(x)) est liée, donc : $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, (\lambda, \mu) \neq (0,0), \lambda.x + \mu.u(x) = 0$.

   Or si μ est nul, alors : $\lambda.x = 0$, et donc : $\lambda = 0$, puisque x est supposé non nul, d'où : $(\lambda, \mu) = (0,0)$, ce qui n'est pas le cas.

   Donc : $\mu \neq 0$, et : $u(x) = -\lambda/\mu.x$

   Autrement dit, on vient de démontrer que : $\forall x \in E, x \neq 0, \exists \alpha \in \mathbb{R}, u(x) = \alpha.x$ (le α dépend de x).

   Soit alors comme proposé $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

   On peut écrire : $\forall 1 \leq i \neq j \leq n, \exists (\alpha_i, \alpha_j) \in \mathbb{R}^2, u(e_i) = \alpha_i.e_i, u(e_j) = \alpha_j.e_j$.

   Mais de plus : $\exists \alpha \in \mathbb{R}, u(e_i + e_j) = \alpha.(e_i + e_j)$.

   En utilisant la linéarité de u, on a alors : $\alpha.(e_i + e_j) = \alpha_i.e_i + \alpha_j.e_j$, et puisque (e_i, e_j) est une famille libre :

   $\alpha = \alpha_i = \alpha_j$.

   Donc : $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall 1 \leq i \leq n, u(e_i) = \alpha.x$.

   Enfin : $\forall x \in E$, x s'écrit sous la forme : $x = x_1.e_1 + \dots + x_n.e_n$, et : $u(x) = x_1.\alpha.e_1 + \dots + x_n.\alpha.e_n = \alpha.x$.

   Conclusion : u est l'homothétie de rapport α.

2. Si pour tout x dans E, (x, u(x)) était liée, alors u serait une homothétie, mais sa matrice dans n'importe quelle base de E serait diagonale avec sur la diagonale le rapport d'homothétie α.

   Sa trace vaudrait alors $n.\alpha$ et α serait nulle puisque la trace de u est supposée nulle.

   Donc u serait l'endomorphisme nul ce qui ne peut être le cas et : $\exists x_0 \in E, (x_0, u(x_0))$ libre.

   La famille $(x_0, u(x_0))$ étant libre, il est possible de la compléter en une base de E avec des vecteurs bien choisis $a_3, \dots, a_n$ de E.

   Mais en posant : $F = \mathrm{Vect}(u(x_0), a_3, \dots, a_n)$, on constate que $\mathrm{Vect}(x_0)$ et F sont supplémentaires puisqu'on obtient une base de E en réunissant une base de chacun d'eux et F contient bien $u(x_0)$.

3. Puisque p est la projection de E sur F, on a immédiatement : $\forall y \in F, pou(y) = p(u(y)) \in F$.

   Donc F est bien stable par pou.

   Déterminons la matrice de u dans la base précédente, et celle de pou.

   La matrice de u dans cette base a pour forme :

$$\text{mat}(u,(x_0,u(x_0),a_3,\dots,a_n)) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

et celle de pou : $\text{mat}(pou,(x_0,u(x_0),a_3,\dots,a_n)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, puisque les vecteurs colinéaires à x_0 ont pour image 0 par p.

Mais la matrice (n – 1, n – 1) qui apparaît est celle de u' dans ($u(x_0)$, a_3, …, a_n) puisqu'elle est exprimée grâce aux coordonnées des images de ces vecteurs de base par pou.

Enfin : $\text{tr}(u) = 0 + a_{22} + \dots + a_{nn} = \text{tr}(pou)$, et c'est aussi tr(u').

Finalement on a bien : tr(u') = 0.

4. Travaillons maintenant comme suggéré par récurrence.
   Un endomorphisme de trace nulle en dimension 1 a une matrice nulle, donc à éléments diagonaux nuls.
   Soit un entier : $n \geq 1$, et supposons le résultat établi pour tout espace vectoriel de dimension n.
   Si E est un espace de dimension n+1 et u un endomorphisme de E de trace nulle, alors l'espace F construit comme au-dessus (avec un vecteur x_0 non nul , F contenant $u(x_0)$) est de dimension : (n+1 – 1) = n, et l'endomorphisme u' induit par pou dans F (avec les mêmes notations) est de trace nulle.
   Donc il existe une base $\mathscr{B}'$ de F dans laquelle la matrice de u' est à éléments diagonaux nuls.
   Examinons alors la matrice de u dans la base : $\mathscr{B} = (\{x_0\} \cup \mathscr{B}')$.

   Elle a pour forme : $\text{mat}(u, \{x_0\}\cup\mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 0 & * & * & \cdots & * \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & a_{32} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}$.

   En effet, $u(x_0)$ appartient à F donc sa première coordonnée dans la base $\mathscr{B}$ est nulle.
   Quant aux autres vecteurs leur image par u et par pou ne diffère que par la composante suivant x_0 « effacée » par p (d'où l'ajout des coordonnées sous forme d'étoile), les autres composantes étant inchangées, en particulier les éléments diagonaux nuls.
   Finalement, la matrice dans la base précédente est bien à éléments diagonaux nuls, ce qui achève la récurrence.
   Si maintenant on a M de trace nulle, son endomorphisme canoniquement associé dans $\mathbb{R}^n$ est de trace nulle, donc il existe une base de E dans laquelle cet endomorphisme a pour matrice une matrice à éléments diagonaux nuls, et donc cette dernière matrice (par l'intermédiaire de la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à cette nouvelle base) est bien semblable à M.
5. Il est clair que : $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$.
   Pour ker(φ), on peut travailler coefficient par coefficient :
   (D.M – M.D) a pour coefficient générique : $\sum_{k=1}^{n}[d_{ik}.m_{kj} - m_{ik}.d_{kj}]$.
   Or si : $i \neq k$, $d_{ik} = 0$, et si : $j \neq k$, $d_{kj} = 0$.
   Donc (DM – MD) a pour coefficient générique : $d_{ii}.m_{ij} - m_{ij}.d_{jj} = (a_i - a_j).m_{ij}$.
   Alors : $\forall\, M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $(M \in \ker(\varphi)) \Rightarrow (\forall\, 1 \leq i,j \leq n,\ (a_i - a_j).m_{ij} = 0) \Rightarrow (\forall\, 1 \leq i \neq j \leq n,\ m_{ij} = 0)$.
   Donc ker(φ) est inclus dans l'ensemble des matrices diagonales $n\times n$.
   Mais il est facile de vérifier l'inclusion inverse.
   Donc finalement, ker(φ) <u>est</u> l'ensemble des matrices diagonales.
6. a. Le théorème du rang garantit tout de suite que G et Im(φ) ont même dimension (au passage $(n^2 - n)$).
   Il suffit de vérifier que φ_1 est injective.
   Pour cela : $\forall\, M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $(\varphi_1(M) = 0) \Rightarrow (M \in G$, et : $\varphi(M) = 0) \Rightarrow (M \in G$, et : $M \in \ker(\varphi)) \Rightarrow (M = 0)$.
   Donc φ_1 définit bien une bijection de G sur Im(φ).

b. Les matrices à éléments diagonaux nuls constituent un sous-espace vectoriel D_0 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $(n^2 - n)$, ce qui se montre par exemple en proposant comme base de ce sous-espace vectoriel la famille des matrices de la base canonique desquelles on a enlevé celles où le coefficient 1 se trouve sur la diagonale.

Puis : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M)$ a pour coefficients diagonaux : $(a_i - a_i).m_{ii} = 0$.

Donc : $\mathrm{Im}(\varphi) \subset D_0$.

Mais comme ces deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ont même dimension, ils sont égaux.

7. A étant de trace nulle, il existe P et A', avec A' à éléments diagonaux nuls, et P inversible telles que : $A' = P^{-1}.A.P$, d'après la question 4.

Puis : $A' \in \mathrm{Im}(\varphi)$, donc : $\exists\, C' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que : $A' = \varphi(C') = D.C' - C'.D$.

Enfin : $A = P.A'.P^{-1} = P.D.P^{-1}.P.C'.P^{-1} - P.C'.P^{-1}.P.D.P^{-1} = B.C - C.B$, en posant : $B = P.D.P^{-1}$, $C = P.C'.P^{-1}$.

On a bien trouvé les matrices demandées.