Corrigé du devoir 2

EXERCICE 1

Ce problème illustre la méthode générale de Cardan pour résoudre les équations du troisième degré à travers l'exemple suivant :

$$x^3 + 3x^2 + (3-6i)x + 2i = 0 \qquad (E)$$

1. On effectue le changement d'inconnue $x = z + h$ dans l'équation (E). Montrer que pour une valeur de h bien choisie, l'équation en z obtenue ne comporte pas de terme de degré deux.
2. On considère l'équation :
$$z^3 - 6iz - 1 + 8i = 0 \qquad (E')$$
   (a) Soient $(u, v) \in \mathbf{C}^2$. On pose $U = u^3$ et $V = v^3$. On suppose que :
$$\begin{cases} U+V &= 1-8i \\ uv &= 2i \end{cases}$$
   Démontrer que $z = u + v$ est une solution de (E').

   (b) Sous les mêmes hypothèses, déterminer une équation du second degré dont U et V sont les racines.

   (c) Résoudre cette équation du second degré (on choisira $U \in \mathbf{R}$). En déduire les valeurs possibles de u et v.

   (d) En déduire une solution z_0 de (E') (*indication* : utiliser les questions précédentes pour trouver un «candidat» et ne pas oublier de vérifier...).

   (e) Factoriser le polynôme $z^3 - 6iz - 1 + 8i$ par $z - z_0$ et en déduire toutes les solutions de (E') (*indication* : $\sqrt{225} = 15$).

   (f) En déduire les solutions de (E).

SOLUTION

1.
$$\begin{aligned}(E) &\iff (z+h)^3 + 3(z+h)^2 + (3-6i)(z+h) + 2i = 0 \\ &\iff z^3 + (3h+3)z^2 + (3h^2+6h+3-6i)z + h^3 + 3h^2 + 3h - 6ih + 2i = 0\end{aligned}$$

   On voit que pour $\boxed{h = -1}$, l'équation en z obtenue ne comporte pas de terme de degré 2 et elle s'écrit :
$$\boxed{z^3 - 6iz - 1 + 8i = 0}$$

2. (a) On a :
$$\begin{aligned}(u+v)^3 - 6i(u+v) - 1 + 8i &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 6i(u+v) - 1 + 8i \\ &= U + V + 3uv(u+v) - 6i(u+v) - 1 + 8i \\ &= 1 + 8i + 6i(u+v) - 6i(u+v) - 1 + 8i \\ &= 0\end{aligned}$$

   Donc, sous les hypothèses indiquées, $u + v$ est bien solution de (E').

   (b) On a $U + V = 1 - 8i$ et $UV = (uv)^3 = (2i)^3 = -8i$ donc, d'après le cours, U et V sont les racines de l'équation :
$$\boxed{Z^2 - (1-8i)Z - 8i = 0 \qquad (E'')}$$

(c) On voit que $\boxed{U=1}$ est une racine de (E''). Le produit des racines de (E'') ests $-8i$ donc l'autre racine est $\boxed{V=-8i}$. On a $u^3 = U = 1$ donc $\boxed{u \in \{1, j, j^2\}}$. On a $v^3 = V = -8i = (2i)^3$ donc $\boxed{v \in \{2i, 2ij, 2ij^2\}}$.

(d) Essayons (par hasard) de vérifier que le nombre $\boxed{z_0 := 1+2i}$ (on essaye donc $u = 1$ et $v = 2i$) est une racine de (E') :

$$\begin{aligned}(1+2i)^3 - 6i(1+2i) - 1 + 8i &= 1 + 3(2i) + 3(2i)^2 + (2i)^3 - 6i + 12 - 1 + 8i \\ &= 1 + 6i - 12 - 8i - 6i + 12 - 1 + 8i \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc z_0, tel que défini plus haut, est bien une solution de (E').

(e) On procède par identification :

$$\begin{aligned} z^3 - 6iz - 1 + 8i = (z-(1+2i))(az^2+bz+c) &\iff z^3 - 6iz - 1 + 8i = az^3 + (b-(1+2i)a)z^2 + (c-(1+2i)b)z - c(1+2i) \\ &\iff \begin{cases} a &= 1 \\ b-(1+2i)a &= 0 \\ c-(1+2i)b &= -6i \\ -c(1+2i) &= -1+8i \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a &= 1 \\ b &= 1+2i \\ c &= -6i+(1+2i)^2 \\ -c(1+2i) &= -1+8i \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a &= 1 \\ b &= 1+2i \\ c &= -3-2i \\ (3+2i)(1+2i) &= -1+8i \end{cases} \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{z^3 - 6iz - 1 + 8i = (z-(1+2i))(z^2+(1+2i)z-3-2i)}$$

On résout maintenant l'équation :

$$z^2 + (1+2i)z - 3 - 2i = 0 \qquad (F)$$

Son discriminant est $\Delta = (1+2i)^2 - 4(-3-2i) = 9 + 12i$. Cherchons les racines carrées de Δ sous la forme $a + ib$ avec $(a,b) \in \mathbf{R}^2$:

$$\begin{aligned} (a+ib)^2 = \Delta &\iff a^2 - b^2 + 2abi = 9 + 12i \\ &\iff \begin{cases} a^2 - b^2 &= 9 \\ 2ab &= 12 \\ a^2+b^2 &= \sqrt{9^2+12^2} \quad \text{(on prend le module)} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a^2 - b^2 &= 9 \\ 2ab &= 8 \\ a^2+b^2 &= \sqrt{225} = 15 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2a^2 &= 24 \quad (L_2+L_1) \\ 2ab &= 8 \\ 2b^2 &= 6 \quad (L_2-L_1) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a^2 &= 12 \\ ab &= 4 \\ b^2 &= 3 \end{cases} \\ &\iff (a,b) = (2\sqrt{3}, \sqrt{3}) \text{ ou } (a,b) = (-2\sqrt{3}, -\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Donc *une* racine carrée de Δ est $2\sqrt{3}+i\sqrt{3}$. Les solutions de (F) sont donc :

$$\frac{-1-2i-2\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{2}=\boxed{\frac{-1-2\sqrt{3}}{2}-\frac{i(2+\sqrt{3})}{2}}$$

et

$$\frac{-1-2i+2\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{2}=\boxed{\frac{-1+2\sqrt{3}}{2}+\frac{i(-2+\sqrt{3})}{2}}$$

Les solution de (E') sont les deux nombres ci-dessus et z_0.

(f) On obtient les solutions de (E) en soutrayant 1 aux solutions de (E') donc les solutions de (E) sont :

$$\boxed{2i,\frac{-3-2\sqrt{3}}{2}-\frac{i(2+\sqrt{3})}{2},\frac{-3+2\sqrt{3}}{2}+\frac{i(-2+\sqrt{3})}{2}}$$

EXERCICE 2

On considère une équation différentielle (E) de la forme :

$$y''+y=f(x) \qquad (E)$$

où $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ est une fonction continue. On note (H) l'équation homogène associée à (E).

1. Résoudre (H) (on donnera les solutions à valeurs *réelles*).
2. Résoudre (E) lorsque f est définie par $\forall x\in\mathbf{R}, f(x)=x$.
3. Résoudre (E) lorsque f est définie par $\forall x\in\mathbf{R}, f(x)=\cos(x)+2\sin(x)$.
4. Pour tout réel x, on pose :
$$G(x)=\int_0^x f(t)\sin(t)\mathrm{d}t$$
$$H(x)=\int_0^x f(t)\cos(t)\mathrm{d}t$$
$$F(x)=-\cos(x)G(x)+\sin(x)H(x)$$
Montrer que G et H sont dérivables sur $\mathbf{R}$ et exprimer leurs dérivées en fonction de f.
5. Démontrer que F est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$ et exprimer F' et F'' en fonction de G et H.
6. Prouver que F est solution de (E).
7. Dans la suite, on suppose que f est 2π-periodique. Calculer les dérivées des fonctions $x\mapsto G(x+2\pi)-G(x)$ et $x\mapsto H(x+2\pi)-H(x)$.
8. À quelle condition nécessaire et suffisante sur $G(2\pi)$ et $H(2\pi)$ la fonction F est-elle 2π-périodique ?
9. Vérifier ce résultat sur la question 3.

SOLUTION

EXERCICE 3

On considère l'équation différentielle suivante :

$$t^2y''+3ty'-3y=t+1 \qquad (t\in\mathbf{R}_+^*) \qquad (E)$$

1. Soit $y:\mathbf{R}_+^*\to\mathbf{R}$ une fonction deux fois dérivable. On pose $z(x)=y(\exp(x))$ pour tout $x\in\mathbf{R}$. Démontrer que z est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$.
2. Pour $t>0$, exprimer $y(t)$, $y'(t)$, et $y''(t)$ à l'aide de la fonction z.
3. Démontrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de :
$$z''+2z'-3z=e^x+1 \qquad (x\in\mathbf{R}) \qquad (F)$$
4. Résoudre (F) sur $\mathbf{R}$.

5. Résoudre (E) sur $\mathbf{R}_+^*$.

SOLUTION

1. On a $\forall x \in \mathbf{R}, z(x) = y(e^x)$ (remarquons que ceci a un sens car y est définie sur $\mathbf{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbf{R}, e^x > 0$). Donc z est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme composée de fonctions dérivables, et :

$$\forall x \in \mathbf{R}, z'(x) = e^x y'(e^x)$$

On sait aussi que y est deux fois dérivable donc y' est dérivable. On déduit alors de la formule ci-dessus que z' est dérivable comme produit et composée de fonctions dérivables. Donc $\boxed{z \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbf{R}}$.

2. En dérivant la relation obtenue dans la question précédente, on a :

$$\forall x \in \mathbf{R}, z''(x) = e^x y'(e^x) + e^{2x} y''(e^x)$$

En "inversant" cette relation et celle obtenue dans la question précédente, on obtient :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \begin{cases} y(e^x) &= z(x) \\ y'(e^x) &= \dfrac{1}{e^x} z'(x) \\ y''(e^x) &= \dfrac{1}{e^{2x}}(z''(x) - e^x y'(e^x)) = \dfrac{1}{e^{2x}}(z''(x) - z'(x)) \end{cases}$$

En posant $t = e^x$, on obtient :

$$\boxed{y(t) = z(\ln(t))} \quad \boxed{y'(t) = \frac{1}{t} z'(\ln(t))} \quad \boxed{y''(t) = \frac{1}{t^2}\left(z''(\ln(t)) - z'(\ln(t)\right)}$$

3.

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E) &\iff \forall t > 0, t^2 y'' + 3ty' - 3y = t + 1 \\ &\iff \forall t > 0, t^2 \frac{1}{t^2}(z''(\ln(t)) - z'(\ln(t))) + 3t\frac{1}{t}z'(\ln(t)) - 3z(\ln(t)) = t + 1 \\ &\iff \forall t > 0, z''(\ln(t)) - z'(\ln(t)) + 3z'(\ln(t)) - 3z(\ln(t)) = t + 1 \\ &\iff \forall x \in \mathbf{R}, z''(x) + 2z'(x) - 3z(x) = e^x + 1 \quad \text{en posant } t = e^x \\ &\iff z \text{ est solution de } (F) \end{aligned}$$

4. On reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Son équation caractéristique est $u^2 + 2u - 3 = 0 \iff (u-1)(u+3) = 0$. Les solutions de l'équation homogène associée à (F) sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-3x}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. On peut par ailleurs vérifier que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{4}xe^x - \dfrac{1}{3}$ est une solution particulière de (F). Donc les solutions de (F) sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{x \mapsto \frac{1}{4}xe^x - \frac{1}{3} + \lambda e^x + \mu e^{-3x} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbf{R}}$$

5. D'après les questions précédentes, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{t \mapsto \frac{1}{4}t\ln(t) - \frac{1}{3} + \lambda t + \frac{\mu}{t^3} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbf{R}}$$

EXERCICE 4

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

1. Rappeler précisément pourquoi $\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

2. Démontrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{1+x^2} = \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}\right) + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$$

3. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$\frac{\pi}{4} = u_n + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2} \mathrm{d}x}{1+x^2}$$

4. Montrer que pour tout entier naturel n et pour tout $x \in [0,1]$:

$$-x^{2n+2} \leq \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} \leq x^{2n+2}$$

5. En déduire que la suite (u_n) converge $\frac{\pi}{4}$.

SOLUTION

1. On sait que $\arctan : \mathbf{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ et $\tan :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbf{R}$ sont des bijections réciproques. Donc :

$$\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[, \arctan(\tan(x)) = x$$

En particulier, pour $x = \pi/4$, on obtient bien : $\boxed{\arctan(1) = \frac{\pi}{4}}$.

2. Soient $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} &= \sum_{k=0}^{n} (-x^2)^k \\ &= \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1-(-x^2)} \quad \text{(somme géométrique de raison } -x^2 \neq 1) \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{1+x^2} \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{1+x^2}}$$

3. On intègre entre 0 et 1 les deux membres de la question précédente :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{1+x^2} \mathrm{d}x \\ [\arctan(x)]_0^1 &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k x^{2k} \mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{1+x^2} \mathrm{d}x \\ \underbrace{\arctan(1) - \arctan(0)}_{= \frac{\pi}{4} \text{ d'après la question 1}} &= \sum_{k=0}^{n} \left[(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{1+x^2} \mathrm{d}x \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{1+x^2} \mathrm{d}x}$$

4. Pour $x = 0$ l'encadrement est évident. Soit donc $x \in]0,1]$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} -x^{2n+2} \leq \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} \leq x^{2n+2} &\iff -1 \leq \frac{(-1)^{n+1}}{1+x^2} \leq 1 \quad \text{car } x^{2n+2} > 0 \\ &\iff -(1+x^2) \leq (-1)^{n+1} \leq 1+x^2 \quad \text{car } 1+x^2 > 0 \end{aligned}$$

Ce dernier encadrement est évidemment vrai, d'où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in [0,1], -x^{2n+2} \leq \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2} \leq x^{2n+2}}$$

5. Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé. Comme l'encadrement de la question précédent est vrai pour tout $x \in [0,1]$, on peut intégrer entre 0 et 1 :

$$\int_0^1 -x^{2n+2}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^{2n+2}\mathrm{d}x$$

Après calcul :

$$-\frac{1}{2n+3} \leq \underbrace{\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}\mathrm{d}x}_{a_n} \leq \frac{1}{2n+3}$$

Cet encadrement est vrai pour tout $n \in \mathbf{N}$, donc le théorème des gendarme donne immédiatement :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Or on a vu dans la question 3 que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n = \frac{\pi}{4} - a_n$$

Donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ converge vers } \frac{\pi}{4}}$.

EXERCICE 5

1. Démontrer que pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \left\{\pm\frac{\pi}{6}\right\}$:

$$\tan(3\theta) = \frac{\tan^3(\theta) - 3\tan(\theta)}{3\tan^2(\theta) - 1}$$

2. Soit $\lambda \in \mathbf{R}^*$ un paramètre non nul. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation d'inconnue t :

$$t^3 - 3t + \lambda(1-3t^2) = 0 \qquad (E)$$

Indication : poser $t = \tan(\theta)$ et $\lambda = \tan(\alpha)$.

3. On note t_k pour $k = 1,2,3$ les racines de (E). On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et pour chaque $k = 1,2,3$, on note D_k la droite d'équation $t_k^2 x + t_k y + 1 = 0$. Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}_k$ de D_k et donner une mesure de l'angle orienté qu'il forme avec $\vec{\imath}$.
4. En déduire que les droites D_k induisent un triangle équilatéral.

SOLUTION

1. On a :

$$\begin{aligned}
\tan(3\theta) &= \tan(\theta + 2\theta) \\
&= \frac{\tan(\theta) + \tan(2\theta)}{1 - \tan(\theta)\tan(2\theta)} \\
&= \frac{\tan(\theta) + \frac{2\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)}}{1 - \tan(\theta)\frac{2\tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)}} \\
&= \frac{(1-\tan^2(\theta))\tan(\theta) + 2\tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta) - 2\tan^2(\theta)} \\
&= \frac{\tan^3(\theta) - 3\tan(\theta)}{3\tan^2(\theta) - 1}
\end{aligned}$$

2. Comme $\tan :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbf{R}$ est bijective, il existe un unique $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$ tel que $\lambda = \tan(\alpha)$ et il existe un unique $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$ tel que $t = \tan(\theta)$.

$$\begin{aligned}(E) &\iff \tan^3(\theta) - 3\tan(\theta) + \tan(\alpha)(1 - 3\tan^2(\theta)) = 0 \\ &\iff \tan^3(\theta) - 3\tan(\theta) = \tan(\alpha)(3\tan^2(\theta) - 1)\end{aligned}$$

Remarquons que :

$$3\tan^2(\theta) - 1 = 0 \iff \tan(\theta) = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \iff \theta = \pm\frac{\pi}{6}$$

Or on vérifie facilement que $\theta = \pm\frac{\pi}{6}$ ne sont pas des solutions.