

Devoir n°8 - Correction

Problème I - Extrait Banque PT 2010

I Intéraction entre deux spires

L'axe OZ est un axe d'antisymétrie pour la distribution des courant. Le champ en tout point de cet axe sera donc colinéaire à l'axe.

1) Les invariances ne sont pas suffisantes ici pour pouvoir applique le théorème d'Ampère. On applique donc la loi de Biot-Savart :

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

On projette alors sur l'axe portant la résultante du champ : $B(z) = \vec{dB} \cdot \vec{e}_z$

$$\text{Alors } B = \oint \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge (\vec{PM} + \vec{OM})}{PM^3} \cdot \vec{e}_z$$

Comme \vec{OM} et $\vec{e}_z = 0$ sont colinéaires,

$$B = \oint \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3} \cdot \vec{e}_z$$

$$B = \oint \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \frac{dl \cdot \vec{e}_\theta \wedge (-a \cdot \vec{e}_r)}{PM^3} \cdot \vec{e}_z$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot a}{4\pi \cdot PM^3} \cdot 2\pi \cdot a$$

Comme $PM = \sqrt{PO^2 + OM^2} = a \cdot \sqrt{2}$, on obtient $\vec{B}(C) = \frac{\mu_0 \cdot I_0 \cdot a}{4 \cdot \sqrt{2} a} \cdot \vec{e}_z$

$$\text{donc } \boxed{\vec{B} = B_0 \cdot \cos \omega t \cdot \vec{e}_z}$$

2) Il s'agit du phénomène d'induction car cette spire se trouve dans une zone de champ variable.

On peut ici appliquer la loi de Faraday, en choisissant le sens positif tel que

$$d\vec{S} = +dS \cdot \vec{e}_z :$$

$$e = -\frac{d}{dt} (\iint B(C) \cdot \vec{e}_z \cdot dS \cdot \vec{e}_z)$$

$$\boxed{e = +N \cdot \omega \cdot B_0 \cdot \pi \cdot b^2 \cdot \sin \omega t}$$

3) On applique la loi d'Ohm généralisée pour la spire fermée : $0 = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} - e$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i = \frac{E_0}{L} \cdot \sin \omega t$$

4) En régime forcé, on peut passer en représentation complexe. On a alors

$$j \cdot \omega \cdot \underline{I} + \frac{R}{L} \cdot \underline{I} = \frac{E_0}{L} \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{2}}$$

$$\text{avec } \underline{I} = I \cdot e^{-\varphi - \frac{\pi}{2}}$$

$$\text{Alors } I = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \cdot \omega^2}} \text{ et } \arg(\underline{I}) = -\frac{\pi}{2} - \arg(R + j \cdot L \cdot \omega)$$

$$\text{Soit } -\varphi - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} - \arg(R + j \cdot L \cdot \omega)$$

$$\boxed{I = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \cdot \omega^2}} \text{ et } \varphi = \arctan\left(\frac{L \cdot \omega}{R}\right)}$$

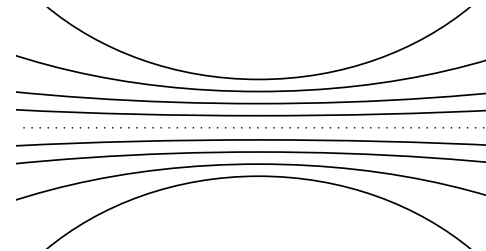
5) Application numérique : $I = 20 \text{ mA}$ et $\varphi = 84^\circ$

6) Il s'agit de la force de Laplace traduisant l'action du champ magnétique sur les charges en mouvement.

$$\vec{F}_L = \oint i(t) \cdot d\vec{l} \wedge \vec{B} = i(t) \cdot \oint dl \cdot \vec{e}_\theta \wedge B(C) \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{F}_L = i(t) \cdot B(C) \cdot \oint dl \cdot \vec{e}_r$$

Attention, il s'agit ici d'un vecteur dont la direction dépend de l'élément d'intégration. Il est donc nécessaire de le projeter dans une base fixe. Au final : $\vec{F}_L = \vec{0}$



8)

9) Tout plan méridien est plan d'antisymétrie pour la distribution des courant. On a donc $\vec{B} \cdot \vec{e}_\theta = 0$

10) Car les variations de la norme du champ seront très faibles.

11) Le champ magnétique est à flux conservatif : $\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
C'est la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Flux : $\text{div} \vec{B} = 0$

12) $\Phi = \Phi_{base(z)} + \Phi_{base(z+dz)} + \Phi_{lat}$ avec :

$$\Phi_{base(z)} = \iint (B_r \cdot \vec{e}_r + B_z(z) \cdot \vec{e}_z) \cdot (-dS \cdot \vec{e}_z) = -B_z(z) \cdot \pi \cdot r^2$$

$$\Phi_{base(z+dz)} = \iint (B_r \cdot \vec{e}_r + B_z(z+dz) \cdot \vec{e}_z) \cdot (+dS \cdot \vec{e}_z) = B_z(z+dz) \cdot \pi \cdot r^2$$

$$\Phi_{base(z)} = \iint (B_r \cdot \vec{e}_r + B_z(z) \cdot \vec{e}_z) \cdot (dS \cdot \vec{e}_r) = B_r(r) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dz$$

La conservation du flux permet d'en déduire : $B_r(r) = \frac{r}{2 \cdot dz} \cdot (B_z(z) - B_z(z+dz))$

Par un développement limité au premier ordre, on arrive bien à la relation proposée.

13) Attention à bien calculer la dérivée avant de chercher sa valeur pour $z = a \dots$

$$\text{On a } \frac{dB_z}{dz} = \frac{-3 \cdot 2z}{2} \frac{\mu_0 \cdot i(t) \cdot a^2}{2 \cdot \pi \cdot (a^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$\text{On arrive à } \boxed{B_1 = \frac{3 \cdot B_0}{4}}$$

On obtient bien des lignes de champ de plus en plus inclinées lorsque r augmente.

14) On ne recalcule pas la force de Laplace due à la composante axiale du champ, dont la résultante reste nulle.

$$\text{On a alors } \vec{F}_L = \oint i(t) \cdot dl \cdot \vec{e}_\theta \wedge B_r \cdot \vec{e}_r$$

Mais B_r est uniforme sur tout le contour, donc $\vec{F}_L = -i(t) \cdot 2 \cdot \pi \cdot b \cdot B_r(b) \cdot \vec{e}_z$

$$\boxed{\vec{F}_L = -\frac{2 \cdot \pi \cdot b^2 \cdot B_1 \cdot I}{a} \cdot \cos \omega t \cdot \sin(\omega t - \varphi) \cdot \vec{e}_z}$$

15) On développe $\cos \omega t \cdot \sin(\omega t - \varphi) = \cos \omega t \cdot (\sin(\omega t) \cdot \cos(\varphi) - \cos(\omega t) \cdot \sin(\varphi))$

$$\text{Or } \langle \cos \omega t \cdot \sin(\omega t) \rangle = 0 \text{ et } \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} \text{ donc : } \boxed{\langle \vec{F}_L \rangle = \frac{\pi \cdot b^2 \cdot B_1 \cdot I}{a} \cdot \sin(\varphi) \cdot \vec{e}_z}$$

16) On a alors $\varphi \equiv 0$. La valeur moyenne tend donc vers 0.

$$17) \langle F_L \rangle = 6 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$

Problème III - Extrait Ecole de l'air 2005

7) On écrit les lois d'Ohm généralisées pour les deux circuits :

$$\begin{cases} u = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_2}{dt} \\ 0 = L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} + M \cdot \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

On en déduit alors que $u = \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) \frac{di_1}{dt}$ soit $\boxed{q = \frac{M^2}{L_1 \cdot L_2}}$

8) Pont diviseur de tension : $u = x \cdot \nu$ puis Millmann :

$$\text{On pose } C_e = \frac{C_a \cdot C_b}{C_a + C_b}$$

$$\underline{V}_c = \frac{\frac{1}{R} + \frac{1}{j \cdot L(q) \cdot \omega} + j \cdot (C_e) \omega}$$

A nouveau le pont diviseur de tension : $\underline{w} = \frac{\frac{1}{j \cdot C_b \cdot \omega}}{\frac{1}{j \cdot C_b \cdot \omega} + \frac{1}{j \cdot C_a \cdot \omega}} \underline{V}_c = \frac{C_a}{C_a + C_b} \underline{V}_c$

On obtient alors la fonction de transfert proposée avec :

$$\boxed{H_0 = \frac{C_a}{x \cdot (C_a + C_b)}; Q = R \cdot \sqrt{\frac{C_e}{L(q)}} \text{ et } \Omega = \sqrt{\frac{1}{L(q) \cdot C_e}}}$$

9) Le passage classique à l'équation différentielle donne

$$\boxed{a = \frac{\Omega}{Q}, b = H_0 \cdot a \text{ et } b = \Omega^2}$$

10) Lorsque l'on boucle le système, cela a pour effet d'imposer $u = w$, l'équation différentielle précédente donne alors :

$$\ddot{w} + \frac{\Omega}{Q} \cdot (1 - H_0) \cdot \dot{w} + \Omega^2 \cdot w = 0$$

La condition d'oscillation est alors $\frac{\Omega}{Q} \cdot (1 - H_0) = 0$, soit $\boxed{x_0 = \frac{C_a}{C_a + C_b}}$

Ce système est alors le siège d'oscillations à la pulsation $\omega = \Omega$, ce qui donne

$$\omega = \frac{(1 - q)^{\frac{1}{2}}}{(L_1 \cdot C_e)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}q\right)}{(L_1 \cdot C_e)^{\frac{1}{2}}}$$

11) On doit avoir $(1 - H_0)$ légèrement négatif, ce que l'on obtient pour $x < x_0$

12) .

13) Il s'agit d'un montage suiveur permettant d'avoir une impédance en entrée du montage infinie. On ne perturbe pas ainsi la boucle inductive.

14) Il s'agit d'un montage intégrateur idéal : $V_F = \frac{-W}{j.C_1.R_1.\omega}$, ce qui donne

pour l'amplitude $E_F = \frac{E_0.\omega_1}{\omega(q)}$

15) Il s'agit cette fois d'un montage dérivateur. On obtient $E_{F'} = \frac{E_0.\omega(q)}{\omega_1}$

16) La diode doit se bloquer dès que V_F décroît à partir de son maximum, alors la tension aux bornes du condensateur ne doit pas évoluer sensiblement tant que V_F ne revient pas à son maximum.

La constante de temps R_2C_2 doit donc être nettement supérieure à la période

$$T = \frac{2.\pi}{\omega} \text{ du signal : } R_2C_2 \gg \frac{2.\pi}{\omega}$$

17) Le principe est le même ici, mais $V_{G'}$ correspondra à la valeur minimale de $V_{F'}$ car la diode est cette fois en sens inverse. On a donc $V_{G'} = -E_{F'}$

$$18) V_- = \frac{\frac{V_G}{R_2} + \frac{V_{G'}}{R_2} + \frac{V_0}{y.r} + \frac{(-V_0)}{(1-y).r} + \frac{s}{R_3}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{y.r} + \frac{1}{(1-y).r} + \frac{1}{R_3}} = V_+ = 0$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} s &= R_3 \cdot \left(\frac{-E_F + E_{F'}}{R_2} - \frac{V_0}{y.(1-y).r} \right) \\ &= R_3 \cdot \left(\frac{E_0}{R_2} \cdot \left(\frac{\omega_0 \cdot \left(1 + \frac{q}{2}\right)}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega_0 \cdot \left(1 + \frac{q}{2}\right)} \right) - \frac{V_0}{y.(1-y).r} \right) \\ &= R_3 \cdot \left(\frac{E_0}{R_2} \cdot \left(\frac{\omega_0 \cdot \left(1 + \frac{q}{2}\right)}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega_0 \cdot \left(1 - \frac{q}{2}\right)} \right) - \frac{V_0}{y.(1-y).r} \right) \end{aligned}$$

19) En absence de véhicule, $q = 0$, ce qui permet de trouver : $0 = \frac{1}{R_3} \cdot \left(\frac{E_0}{R_2} \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega_0} \right) - \frac{V_0}{y.(1-y).r} \right)$

On obtient alors une expression simplifiée de s :

$$s = R_3 \cdot \frac{E_0}{R_2} \cdot \left(\frac{\omega_0.q}{2.\omega_1} + \frac{\omega_1.q}{2.\omega_0} \right)$$

III. Physique du skeleton

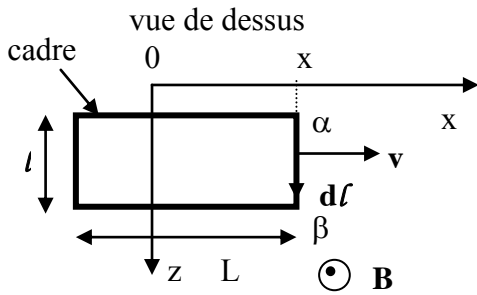
III.A. Théorème de l'énergie cinétique : $-\frac{1}{2} m v_0^2 = -m g \sin \alpha$ d'où $a = v_0^2 / 2 g \sin \alpha$
 $a = 30^2 / 2 * 10 * 0,05 = 900 \text{ m}$

III.B.

III.B.1)

a) **La résistance R du cadre nécessaire à la résolution de la question n'est introduite que dans la constante cherchée τ et n'est pas mentionnée dans la description du cadre précédent cette question !**

Lorsque le cadre pénètre dans la région où règne le champ magnétique B, la variation du flux magnétique crée un courant induit dans le cadre.



Déterminons la fém induite : $\epsilon_{\text{ind}} = \int_{\text{cadre}} (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = \int_{\text{cadre}} v B_0 \vec{u}_z \cdot d\vec{\ell} = \int_{\alpha\beta} v B_0 \vec{u}_z \cdot d\vec{\ell} = v B_0 \ell$

Du point de vue électrocinétique le est équivalent au circuit ci-contre
 $= R i = v B_0 \ell$

On applique la rfd projetée directement sur Ox au cadre : $m \frac{dv}{dt} = F_{\text{lapx}}$ où F_{lapx} est la force de Laplace qui s'exerce sur le cadre. $\vec{F}_{\text{lap}} = \int_{\text{cadre}} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$.

La force de Laplace n'est pas compensée sur le côté $\alpha\beta$, $\vec{F}_{\text{lap}} = \int_{\alpha\beta} -i d\ell B_0 \vec{u}_x = -i \ell B_0 \vec{u}_x$

soit $\frac{dv}{dt} = -\frac{i \ell B_0}{m} = -\frac{v (\ell B_0)^2}{m R}$ d'où l'équation différentielle

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0 \text{ avec } \tau = \frac{m R}{(\ell B_0)^2}. \text{ Cette expression reste valable tant que } x < L$$

Lorsque le cadre est entièrement dans la région où règne B, le flux ne varie plus donc plus de courant induit, donc plus de force de Laplace, le mouvement du cadre redevient alors rectiligne uniforme.

si $x > L$ $\frac{dv}{dt} = 0$

b) si $x < L$ $v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$ et $x(t) = \tau v_0 (1 - e^{-t/\tau})$

Le cadre sort de la zone de décélération lorsque $x(t_f) = L = \tau v_0 (1 - e^{-t_f/\tau})$ d'où $e^{-t_f/\tau} = 1 - L / v_0 \tau$. On en déduit alors la vitesse en fin de décélération : $v_f = v_0 - L / \tau$.

l'engin s'arrête si $v_f \leq 0$ soit $L \geq v_0 \tau$

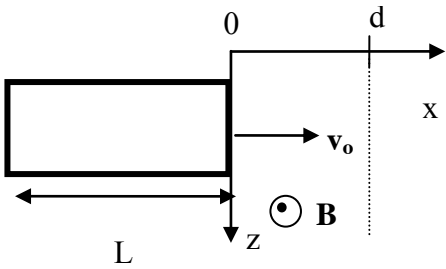
AN : $\tau = (100 * 0,01) / (0,3 * 1)^2 = 11 \text{ s}$; $L = 333 \text{ m} \gg L \text{ skeleton !}$
 $v_f = 30 - 0,5 / 11 = 29,9 \text{ m.s}^{-1}$.

La vitesse a très peu diminué au cours de cette phase de freinage. Il faudra donc envisager un autre système de freinage ...

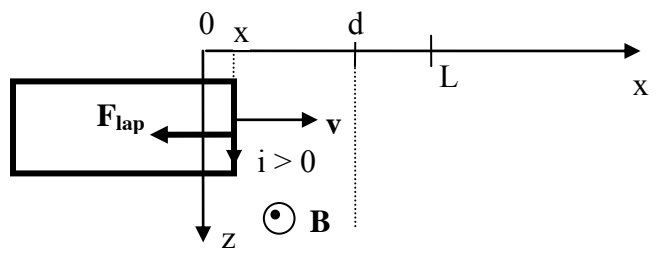
III.B.2)

a) $L \leq d$ Le freinage s'effectue tant que le flux de B varie dans le cadre :

pas de freinage $x < 0$

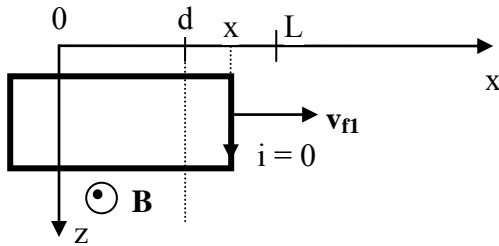


1^{ère} phase de freinage $0 < x < d$

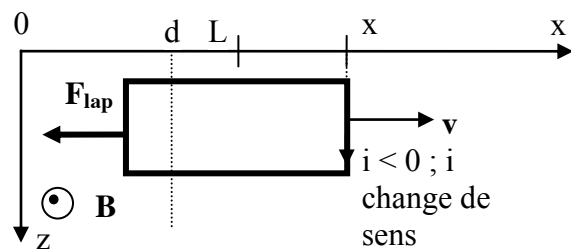


A l'issue de la 1^{ère} phase de freinage $v_{f1} = v_0 - d/\tau$.

pas de freinage $d < x < L$
la vitesse du cadre reste constante



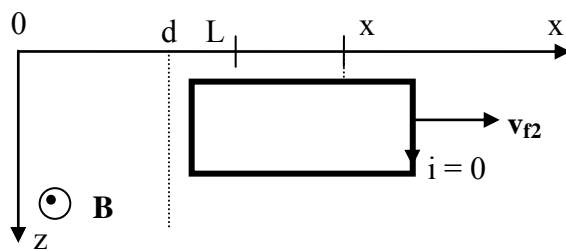
2^e phase de freinage $0 < x-L < d$ soit $L < x < d+L$



A l'issue de la 2^e phase de freinage $v_{f2} = v_{f1} - d/\tau$

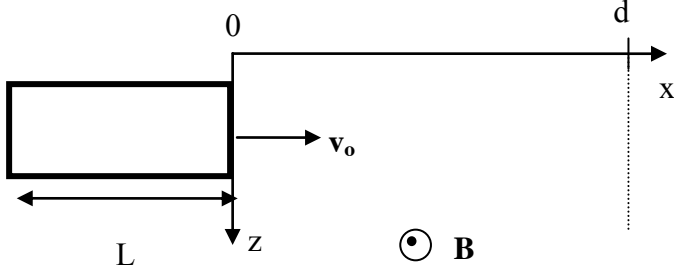
$$= v_0 - 2d/\tau$$

plus de freinage $x > d+L$

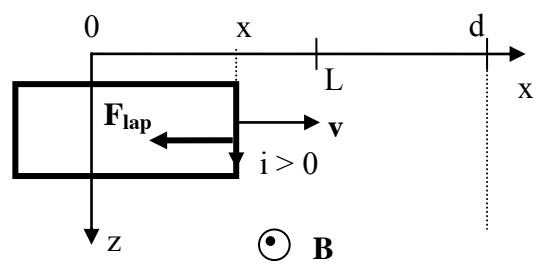


b) $L \geq d$

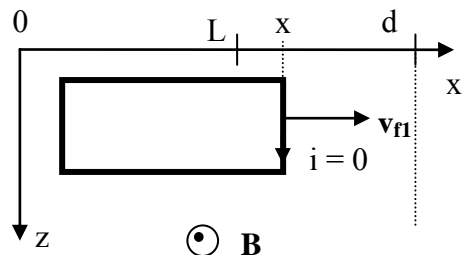
pas de freinage $x < 0$



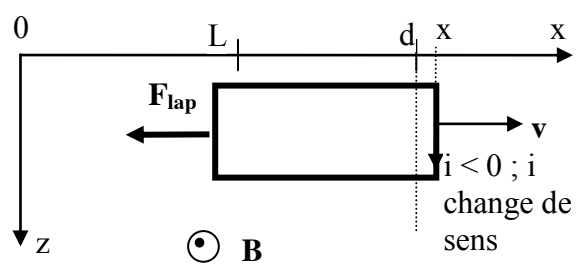
1^{ère} phase de freinage $0 < x < L$



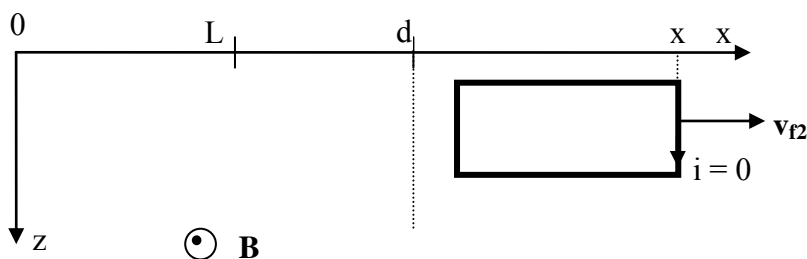
pas de freinage $L < x < d$
la vitesse du cadre reste constante



2^e phase de freinage $d < x < d+L$



plus de freinage $x > d+L$



A l'issue de la 1^{ère} phase de freinage $v_{f1} = v_0 - L/\tau$.

A l'issue de la 2^e phase de freinage $v_{f2} = v_{f1} - L/\tau = v_0 - 2L/\tau$.

c) On veut que v_{f2} soit le plus petit possible et qu'il n'existe pas de zone où v soit constante. Il faut donc prendre $L = d$.

III.B.3) On appelle zone de freinage une région telle que pour $0 < x < L$ le champ magnétique vaut $B_0 \vec{e}_y$, puis pour $L < x < 2L$ le champ magnétique est nul. La distance D entre 2 zones de freinage successives doit donc être nulle, afin que le freinage se déroule de manière continue.

Pour stopper le skeleton il faut $v_f = 0$ après N zones de freinage, soit $v_{fN} = v_0 - 2NL / \tau$ d'où $N = v_0 \tau / 2L = 333,3 / 1 = 334$

La distance d'arrêt est donc de $2LN = 334$ m, soit environ 3 fois plus faible que celle de la question préliminaire et bien plus faible également que celle qu'on n'a pas déterminée dans la question **III.B.1** puisque l'engin ne s'arrête jamais...

III.B.4)

a) D'après le résultat de la question **III.B.1)b)** la durée de la 1^{ère} phase de freinage est

$$t_{f1} = -\tau \cdot \ln(1 - L / \tau v_0)$$

$$\text{AN : } t_{f1} = -11,1 \cdot \ln(1 - 0,5/333) = 16,7 \text{ ms}$$

si t_{f2} est l'instant de fin de la 2^e phase de freinage :

$$(t_{f2} - t_{f1}) = -\tau \cdot \ln(1 - L / \tau v_{f1}) = -\tau \cdot \ln(1 - L / (\tau v_0 - L)) = -\tau \cdot \ln\left(\frac{\tau v_0 - 2L}{\tau v_0 - L}\right)$$

et donc $t_{f2} = -\tau \cdot \ln\left(\frac{\tau v_0 - 2L}{\tau v_0}\right)$ est la durée de freinage après passage dans la première zone de freinage optimisée.

$$\text{AN : } t_{f2} - t_{f1} = -11,1 \cdot \ln\left(\frac{333 - 1}{333 - 0,5}\right) = 16,7 \text{ ms}$$

La durée totale du freinage est $t_{f2N} = -\tau \cdot \ln\left(\frac{\tau v_0 - 2LN}{\tau v_0}\right)$ qui tend vers $+\infty$ puisque $\tau v_0 = 2LN$.

Ce freinage n'est donc pas utilisable pour toute la durée.

b) On veut $v_f = 10 \text{ m.s}^{-1} = v_1 = v_0 - 2NL / \tau$ soit $N = (v_0 - v_1)\tau / 2L = 222,2$.

Il faut donc 223 zones de freinage.

$$\text{La durée sera de } t_{f2N} = -11,1 \cdot \ln\left(\frac{333 - 223}{333}\right) = 12,3 \text{ s.}$$