Devoir 8 - Corrigé - CCP 2016

Merci à Eddie Saudrais pour sa relecture attentive.
Ce corrigé peut être distribué à vos étudiants.

Problème A Le Haut-Parleur électrodynamique

A.1. Étude temporelle du fonctionnement

A.1.1. La source fournit un signal électrique et on cherche à mettre en mouvement mécanique la membrane afin de générer des ondes mécaniques. On convertit donc une puissance électrique en puissance mécanique.

A.1.2.

A.1.2.1- Le circuit est mobile et placé dans une zone de champ magnétique. Il peut donc y avoir création d'une fem induite. *Son expression dépasse le cadre du programme car il faut considérer ici un flux coupé. Il n'est donc pas possible d'aller plus loin dans la justification.*

A.1.2.2- En appliquant la loi des mailles : $\boxed{u - R.i - L.\frac{di}{dt} + e = 0}$, avec

- e : la fem induite évoquée plus haut
- $-L.\frac{di}{dt}$: la fem due à l'auto-induction
- $R.i$: tension aux borne de la résistance, associée à une phénomène de déperdition par effet Joule.

A.1.3. $\overrightarrow{df_L} = I.\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B} = i(t).dl\overrightarrow{u_\theta} \wedge B\overrightarrow{u_r}$ donc $\boxed{\overrightarrow{df_L} = -i(t).B.dl.\overrightarrow{u_z}}$

A.1.4. On reconnait l'expression des différentes forces appliquées au système elon l'axe Oz, en considérant cet axe horizontal :

- Force de Laplace $\overrightarrow{f_l} = \int_{spires} \overrightarrow{df_L} = -i(t).B.l.\overrightarrow{u_z}$
- Force de rappel exercée par le spider : $\overrightarrow{F_{rappel}} = -k.\Delta l.\overrightarrow{u_z}$ avec $\Delta l = l_{eq} + z - l_0$. Mais si l'axe Oz est horizontal, $l_{eq} = l_0$
- $f_{air} = -\lambda.\overrightarrow{v}$ force de frottement fluide avec l'air.

Il suffit de poser $\overrightarrow{v} = z'(t).\overrightarrow{u_z}$ pour obtenir $\boxed{m.z''(t) = -i(t).l.B - k.z(t) - \lambda.z'(t)}$

A.2. Régime sinusoïdal forcé

A.2.1.

- Pour l'équation électrique : $\underline{u} - R.\underline{i} - j.L.\omega\underline{i} + z'(t).B.l = 0$
- Pour l'équation mécanique : $-m.\omega^2.\underline{z} = -\underline{i}l.B - k.\underline{z} - \lambda.j.\omega.\underline{z}$

A.2.2. Il faut donc éliminer par substitution $\underline{z}$. L'équation électrique permet d'écrire $\underline{z} = \frac{-\underline{u} + R.\underline{i} + j.L.\omega.\underline{i}}{j.L.\omega.B}$

Que l'on remplace dans l'équation mécanique : $(-m.\omega^2 + \lambda.j.\omega. + k)\,\frac{-\underline{u} + R.\underline{i} + j.L.\omega.\underline{i}}{j.L.\omega.B} = -l.B\underline{i}$

On regroupe les termes : $\underline{u}.\left(m.\omega^2 - j.\omega.\lambda - k\right) = \underline{i}.\left[\left(m.\omega^2 - j.\omega.\lambda - k\right)\left(R + j.L.\omega\right) - j.\omega.B^2.l^2\right]$

Ce qui amène à l'expression $\boxed{\underline{Z} = \underbrace{\frac{-j.\omega.B^2.l^2}{m.\omega^2 - j.\lambda.\omega - k}}_{\underline{Z}_m} + \underbrace{(R + j.L.\omega)}_{\underline{Z}_e}}$

A.2.3. Le couplage électro-mécanique se fait grâce à l'existence du champ magnétique. En posant $B = 0$, on doit donc obtenir $\underline{Z} = \underline{E}_e$ d'où les expressions des impédances ci-dessus.

A.2.4. On a $\underline{Y}m = \dfrac{m.\omega^2 - j.\lambda.\omega - k}{-j.\omega.B^2.l^2} = \dfrac{m.\omega^2}{-j.\omega.B^2.l^2} + \dfrac{-j.\lambda.\omega}{-j.\omega.B^2.l^2} + \dfrac{k}{j.\omega.B^2.l^2}$

Soit $\underline{Y}m = \dfrac{m}{B^2.l^2}j.\omega + \dfrac{\lambda}{B^2.l^2} + \dfrac{k}{B^2.l^2}.\dfrac{1}{j.\omega}$. On reconnaît donc $\boxed{C_m = \dfrac{m}{B^2.l^2}\ ;\ R_m = \dfrac{B^2.l^2}{\lambda} \text{ et } L_m = \dfrac{B^2.l^2}{k}}$

A.N. : $C_m = \dfrac{4.10^{-3}}{(1,05.3,81)^2} = 2,5.10^{-4}\ F$; $L_m = \dfrac{(1,05.3,81)^2}{1250} = 12,8\ mH$ et $R_m = \dfrac{(1,05.3,81)^2}{1} = 16\ \Omega$

A.2.5. On a donc $\underline{Z} = \dfrac{1}{\underline{Y}} + \underline{Z}_e = \dfrac{1}{j.\left(C_m.\omega - \dfrac{1}{L_m.\omega}\right) + \dfrac{1}{R_m}} + \underline{Z}_e = \dfrac{\dfrac{1}{R_m} - j.\left(C_m.\omega - \dfrac{1}{L_m.\omega}\right)}{\left(C_m.\omega - \dfrac{1}{L_m.\omega}\right)^2 + \dfrac{1}{R_m^2}} + R + j.L.\omega$

Or $\mathcal{R}e\left(\underline{Z}\right) = \dfrac{\dfrac{1}{R_m}}{\left(C_m.\omega - \dfrac{1}{L_m.\omega}\right)^2 + \dfrac{1}{R_m^2}} + R = \dfrac{R_m^2}{R_m^2}.\dfrac{\dfrac{1}{R_m}}{\left(C_m.\omega - \dfrac{1}{L_m.\omega}\right)^2 + \dfrac{1}{R_m^2}} + R$

On retrouve bien la relation proposée.

A.2.6.

- On remarque que si $\omega \to 0$ $\left(\text{ou } \omega \ll \dfrac{1}{\sqrt{C_m.L_m}}\right)$ alors $R_T \to R$ car $\left(C_m.\omega - \dfrac{1}{L_m.\omega}\right)^2 \equiv \left(-\dfrac{1}{L_m.\omega}\right)^2 \to \infty$

  On lit donc $\boxed{R = 8\ \Omega}$

- D'autre part $R_T(\omega)$ admet son maximum pour $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{C_m.L_m}} = \dfrac{1}{\sqrt{2,5.10^{-4}.12,8.10^{-3}}} = 559\ rad.s^{-1}$, soit $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2.\pi} = 89\ Hz$.

  On lit bien une pulsation d'environ 550 $rad.s^{-1}$ pour la résonance.

A.3. Étude énergétique

A.3.1. On part de l'équation électrique et on multiplie par $i(t)$: $u.i = R.i.i + L.\dfrac{di}{dt}.i + z'.B.l.i$

- L'énergie magnétique s'écrit $E_{magn} = \dfrac{1}{2}.L.i^2$ donc $\dfrac{d\left(E_{magn}\right)}{dt} = \dfrac{1}{2}.L.2.i.\dfrac{di}{dt}$
- La puissance des forces de Laplace a pour expression $\mathcal{P}_L = \overrightarrow{f_L} \cdot \overrightarrow{v} = -i.l.B.z'$
- La puissance dissipée par effet Joule par la résistance a pour expression $\mathcal{P}_J = R.i^2$

On retrouve donc le bilan proposé.

A.3.2. On part de l'équation mécanique et on multiplie pas $v = \dfrac{dz}{dt}$: $m.\dfrac{dv}{dt}.v = -i.l.B.v - k.z.\dfrac{dz}{dt} - \lambda.v.v$

- L'énergie cinétique s'écrit $E_c = \dfrac{1}{2}.m.v^2$ donc $\dfrac{d\left(E_c\right)}{dt} = \dfrac{1}{2}.m.2.v.\dfrac{dv}{dt}$
- On retrouve la puissance des forces de Laplace $\mathcal{P}_L = \overrightarrow{f_L} \cdot \overrightarrow{v} = -i.l.B.z'$
- La puissance de la force de frottement fluide a pour expression $\overrightarrow{f}_{air} \cdot \overrightarrow{v} = -\lambda.v^2$. On pose $\mathcal{P}_A = \lambda.v^2$

- L'énergie potentielle associée à la force de rappel élastique a pour expression, en considérant $\Delta l = z$: $E_{pe} = \frac{1}{2}.k.z^2$ donc $\frac{d\left(E_{pe}\right)}{dt} = k.z$

On retrouve donc le bilan proposé.

A.3.3. On substitue à la puissance de Laplace dans le bilan mécanique son expression obtenue grâce au bilan électrique, ce qui amène directement au bilan proposé, avec :
$\boxed{E_m = E_c + E_{pe}}$

A.3.4. *On rappelle que pour une fonction f de période T, $\left\langle \frac{df}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{df}{dt}.dt = \frac{f(t_0+T) - f(t_0)}{T} = 0$.*
Cette propriété sera utilisé au cours des questions suivantes également
$\left\langle \frac{d\left(E_M + E_{magn}\right)}{dt} \right\rangle = 0$. Il reste donc $\langle \mathcal{P}_S \rangle = \langle u.i \rangle = \langle \mathcal{P}_J \rangle + \langle \mathcal{P}_A \rangle$
Donc $\langle \mathcal{P}_S \rangle = R.\langle i^2 \rangle + \lambda.\langle v^2 \rangle$
L'objectif de ce haut-parleur est de générer des ondes mécaniques. Le couplage s'effectue ici par la force "de frottement fluide". La puissance utile correspond donc aux interactions avec l'air, donc à $\langle \mathcal{P}_A \rangle$.
On peut en déduire l'expression du rendement $\eta = \frac{\textit{Ce que l'on souhaite obtenir}}{\textit{Ce qui est coûteux}} = \frac{\langle \mathcal{P}_A \rangle}{\langle \mathcal{P}_S \rangle}$
Comme $\eta = \langle \mathcal{P}_A \rangle = \langle \mathcal{P}_S \rangle - \langle \mathcal{P}_J \rangle$, on obtient donc $\eta = \frac{\langle \mathcal{P}_S \rangle - \langle \mathcal{P}_J \rangle}{\langle \mathcal{P}_S \rangle}$ soit $\boxed{\eta = 1 - \frac{R.\langle i^2 \rangle}{\langle \mathcal{P}_S \rangle}}$

A.3.5. $u = R_T.i + L.\frac{di}{dt}$ donc $u.i = R_T.i^2 + L.\frac{di}{dt}.i = R_T.i^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}.L.i^2\right)$
En passant à la valeur moyenne et comme $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}.L.i^2\right) = 0$, il reste $\langle u.i \rangle = R_T.\langle i^2 \rangle$
Donc $\eta = 1 - \frac{R.\langle i^2 \rangle}{R_T.\langle i^2 \rangle}$: $\boxed{\eta = 1 - \frac{R}{R_T} = \frac{R_T - R}{R_T}}$

A.3.6. Comme $\eta = 1 - \frac{R}{R_T}$, η est maximum si R_T est maximum, donc pour $\omega = \omega_0 = 550\ rad.s^{-1}$, ce qui est bien en accord avec la représentation fournie.

A.3.7. On va rechercher la zone de rendement maximal, soit autour de $f_0 = 89\ Hz$. L'oreille a une bande passante allant environ de $40\ Hz$ à $20\ kHz$. Ce haut-parleur restitue donc les sons graves.

A.3.8. Un enceinte doit restituer avec un même rendement l'ensemble du spectre audible. Or le rendement du haut-parleur décroît rapidement lorsque l'on s'éloigne de la pulsation de résonance. Il ne peut donc couvrir de façon acceptable l'ensemble du spectre audible. Il est donc nécessaire d'avoir des haut-parleur avec des bandes passantes spécifiques grave-médium-aigu en général.