D5 - Corrigé

Troisième problème : A propos du théorème de Gauss

Première partie : Le théorème de Gauss

1. Le flux du champ électrostatique sortant d'une surface fermée est égal au rapport de la charge intérieure à la surface sur ε_0 : $\oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{d^2S} = Q_{int}/\varepsilon_0$

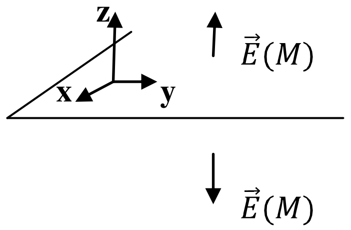
L'équation de Maxwell-Gauss : $div\,\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ permet de démontrer le théorème de Gauss.

Deuxième partie : Condensateur plan

2. Soit le plan infini chargé xOy.
$\vec{E}(M)$ est un vecteur donc il appartient aux plans de symétrie des charges $(M,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_z})$ et $(M,\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$:
$\vec{E}(M) = E(x,y,z)\overrightarrow{e_z} = E_z(z)\overrightarrow{e_z}$ car le plan est infini selon Ox et Oy.
Le plan z=0 est un plan de symétrie des charges donc $E_z(z) = -E_z(-z)$
On considère un cylindre d'axe z'z, de rayon R, se trouvant entre les plans z et –z (z>0).

Le théorème de Gauss donne : $\oiint_{cyl} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d^2S}$ = $E_z(z)\,\pi R^2 - E_z(-z)\,\pi R^2 = 2\,E_z(z)\,\pi R^2 = \sigma\,\pi R^2/\varepsilon_0$

D'où pour z>0, $E_z(z) = \sigma/2\varepsilon_0$; Pour z <0, $E_z = -\sigma/2\varepsilon_0$.



3. 1 On prend le plan1 ($-\sigma$) en z = 0 et le plan2 (σ) en z = d.

D'après le théorème de superposition :

Pour z <0 : $\vec{E}(M) = \overrightarrow{E_1}(M) + \overrightarrow{E_2}(M) = [\,-(-\sigma/2\varepsilon_0) - (\sigma/2\varepsilon_0)]\,\overrightarrow{e_z} = \vec{0}$

Pour 0<z<d : $\vec{E}(M) = \overrightarrow{E_1}(M) + \overrightarrow{E_2}(M) = [\,(-\sigma/2\varepsilon_0) - (\sigma/2\varepsilon_0)]\,\overrightarrow{e_z} = -(\sigma/\varepsilon_0)]\,\overrightarrow{e_z}$

Pour z >d : $\vec{E}(M) = \overrightarrow{E_1}(M) + \overrightarrow{E_2}(M) = [\,(-\sigma/2\varepsilon_0) + (\sigma/2\varepsilon_0)]\,\overrightarrow{e_z} = \vec{0}$

3.2 Le potentiel le plus élevé est celui du plan 2 (σ) .

$U = V_2\ (z=d) - V_1\ (z=0) = \int_2^1 \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \sigma\, d/\varepsilon_0$

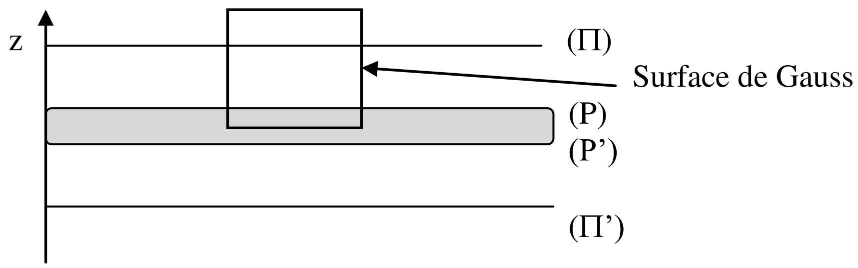
3.3 On a, pour le plan 2 (σ) : $Q = \sigma S = C\,(V_2 - V_1) = C\,U$

D'où $C/S = \varepsilon_0/d$

4. Le champ électrostatique qui règne dans le condensateur déplace les électrons de la lame jusqu'à ce que le champ total régnant dans cette lame soit nul.

Il apparait des charges négatives sur le plan(P) et des charges positives sur le plan (P')

5.



On applique le théorème de Gauss à un cylindre de section S et d'axe z'z (voir dessin), le champ entre les armatures est toujours de la forme : $\vec{E}(M) = E_z(z)\overrightarrow{e_z}$

Le champ électrique est nul sur les surfaces S et aucun flux ne sort par la surface latérale

Donc $\oiint_{cyl} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d^2S} = 0 = (\sigma S + \sigma_p S)/\varepsilon_0$: on en déduit $\sigma_P = -\sigma$

De même, on en déduit $\sigma_{P'} = +\sigma$

6.1 On retrouve les mêmes condensateurs séparés de la distance (d-e)/2

Entre (P) et (Π), $\vec{E}(M) = -(\sigma/\varepsilon_0)]\,\overrightarrow{e_z}$; Entre (P') et (Π'), $\vec{E}(M) = -(\sigma/\varepsilon_0)]\,\overrightarrow{e_z}$.

D'où $U' = \int_2^1 \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \sigma\,(d-e)/\varepsilon_0$

6.2 On a, pour le plan (Π) : $Q = \sigma S = C'\,U'$

D'où $C'/S = \varepsilon_0/(d-e) = (C/S)\,d/(d-e) > (C/S)$

La capacité en présence de la lame est plus grande que sans la lame.

Troisième partie : Condensateur cylindrique

7. On considère un cylindre de même axe que ceux de la distribution de rayon r et de hauteur H.
Comme le champ est radial, $\oiint_C \vec{E}.\overrightarrow{d^2S} = \iint_{S_{lat}} \vec{E}.\overrightarrow{d^2S}$ = E_r 2πr H.

Le théorème de Gauss donne : $\oiint_C \vec{E}.\overrightarrow{d^2S} = Q_{int}/\varepsilon_0$

Pour r < R_1 : Q_{int} = 0 donc $\vec{E}$(M) = $\vec{0}$

Pour r > R_2 : Q_{int} = Q – Q = 0 donc $\vec{E}$(M) = $\vec{0}$

Pour R_1 < r < R_2 : Q_{int} = Q d'où $\vec{E}(M) = Q/(2\pi\varepsilon_0\ rH)\,\overrightarrow{u}$.

8. On a E_r = -dV/dr d'où V(r) = $-Q/(2\pi\varepsilon_0\ H)$ Ln r + k

V = V_1 pour r = R_1 d'où V(r) = $Q/(2\pi\varepsilon_0\ H)$ Ln (R_1/r) + V_1

U = $V_2 - V_1$ = $Q/(2\pi\varepsilon_0\ H)$ Ln (R_1/R_2)

9. Q = C ($V_1 - V_2$) d'où C = 2π ε_0 H/ Ln(R_2 /R_1)

10. $W_{cond} = \iiint_{espace}(\varepsilon_0\ E^2/2)\ d^3\tau = \iiint_{condensateur}(\varepsilon_0\ E^2/2)\ dr\ rd\theta\ dz$

En intégrant : W_{cond} = (Q^2/(4πε_0 H)) Ln (R_2/R_1) = ½ Q^2/C.

11. C = 2πε_0H / Ln (1+e/R_1) .

Or au premier ordre en x, Ln (1+x) = x donc C = 2πε_0H R_1/e = ε_0 S_{lat}/e : c'est la capacité d'un condensateur plan dont les armatures sont séparées de e et ont une surface S = 2πR_1 H .