

A Étude de capteurs capacitifs (30 %)

1) Résultats sur les champs

1-a) Les équations de Maxwell en régime stationnaire s'expriment :

Maxwell-Gauss :	$\text{div}(\vec{E}) = \rho/\epsilon_0$	Maxwell-Faraday	$\text{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$
Maxwell-Flux	$\text{div}(\vec{B}) = 0$	Maxwell-Ampère	$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \cdot \vec{j}$

1-b) Le flux du champ électrostatique à travers toute surface fermée est égal au rapport de la charge contenue dans le volume délimité par cette surface par la permittivité diélectrique du vide :

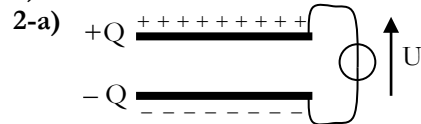
$$\oiint \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = Q_{\text{int}}/\epsilon_0$$

1-c) Soit un volume \mathcal{V} délimité par une surface fermée S , en intégrant l'équation de

Maxwell-Gauss : $\iiint_{\mathcal{V}} \text{div}(\vec{E}(M)) \cdot dV = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} \cdot dV$ et d'après le **théorème de**

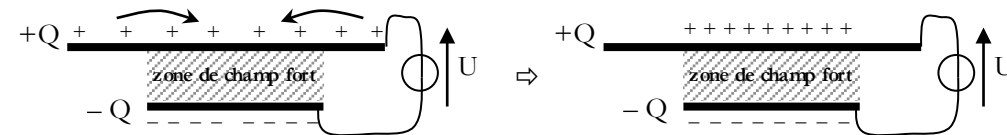
Green-Ostrogradsky $\oiint_S \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} \cdot dV = Q_{\text{int}}/\epsilon_0$.

2) Fonctionnement

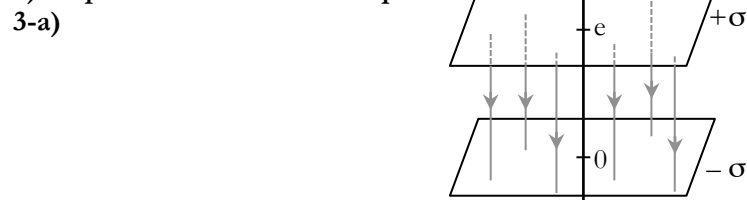


2-b) Par définition $Q = C \cdot U$

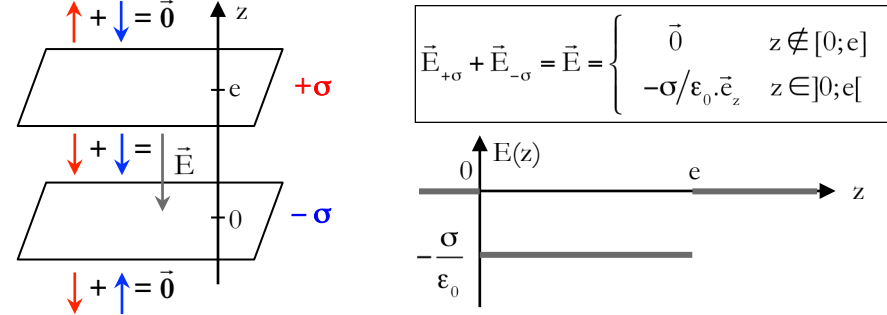
2-c) Il s'établit une **interaction attractive** entre les charges de signes opposés. Si une portion d'armature n'est pas en regard de l'autre, aucune charge ne s'y accumule : elles migrent en regard de l'autre armature où le champ électrique est plus fort.



3) Capacité du condensateur plan

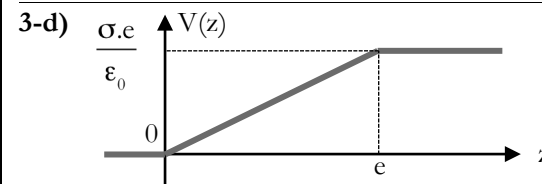


3-b) Les effets de bords étant négligés, chaque armature est assimilable à un **plan infini uniformément chargé** créant un champ $\vec{E} = \pm \sigma / (2 \cdot \epsilon_0) \cdot \vec{n}$, d'après le **théorème de superposition**, le champ total est la somme des champs créés par chaque plan :



Rq : une démarche avec analyse des symétries, invariances et théorème de Gauss est aussi possible, mais prendrait beaucoup de temps pour une question aussi courte...

3-c) Par définition $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{OM}$ d'où $V(M) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \sigma \cdot z / \epsilon_0 & z \in [0; e] \\ \sigma \cdot e / \epsilon_0 & z > e \end{cases}$ avec $V(0) = 0$.

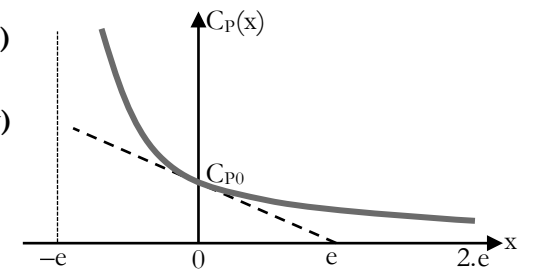


3-e) D'après la définition de la question 2-b) $C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma \cdot S}{\sigma \cdot e / \epsilon_0}$ donc $C_{p0} = \frac{\epsilon_0 \cdot S}{e}$.

3-f) i) Si l'épaisseur varie $C_p(x) = \frac{\epsilon_0 \cdot S}{e+x}$ ii)

d'où $C_p(x) = \frac{e}{e+x} \cdot C_{p0}$ iv)

iii) $C_p(x) = \frac{1}{1+x/e} \cdot C_{p0} \approx \left(1 - \frac{x}{e}\right) \cdot C_{p0}$



4) Condensateur cylindrique

4-a) Les coordonnées cylindriques sont les plus adaptées ici.

4-b) Soit M un point quelconque de l'espace. Les plans (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z) et (M, $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$) sont des plans de symétries des charges donc des plans de symétrie du champ électrique, de plus, comme M leur appartient, ils contiennent le champ \vec{E} d'où $\vec{E}(M) = E(M) \cdot \vec{e}_r$. De plus, la distribution de charges est invariante par rotation d'angle θ et par translation selon \vec{e}_z donc E(M) ne dépend que de r et $\vec{E}(M) = E(r) \cdot \vec{e}_r$.

4-c) Surface de Gauss S = cylindre d'axe (Oz), de rayon r et de longueur L.

$$\oiint_S \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \oiint_{r \text{ fixé}} (E(r) \cdot \vec{e}_r) \cdot (dS \cdot \vec{e}_r) = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot E(r) \text{ (pas de flux sur les disques)}$$

Théorème de Gauss $\oiint_S \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \begin{cases} -Q/\epsilon_0 & r \in]R_1; R_2[\\ 0 & r \notin [R_1; R_2] \end{cases}$

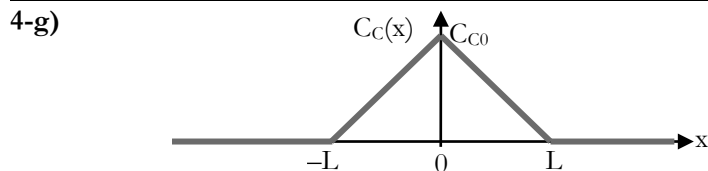
donc $\vec{E}(M) = \begin{cases} -Q/(2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot \epsilon_0) \cdot \vec{e}_r & r \in]R_1; R_2[\\ \vec{0} & r \notin [R_1; R_2] \end{cases}$

r	0	R ₁	R ₂	∞
\vec{E}	0	Q/2.π.r.L.ε ₀	0	

4-d) Par déf. de V : $V(R_2) - V(R_1) = \int_{R_1}^{R_2} -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot \epsilon_0} \cdot dr$ $V = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

4-e) Par définition, $C = \frac{Q}{V}$ donc $C_{C0} = \frac{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}$

4-f) En remplaçant L par L - |x| dans l'expression précédente : $C_C(x) = (1 - |x|/L) \cdot C_{C0}$



4-h)	condensateur plan	condensateur cylindrique
linéarité	non (sauf pour x « e)	oui dans toute la gamme [0 ; L]
mesure algébrique	oui	non*

* on peut y remédier en positionnant le point x=0 à mi-course du cylindre intérieur.

5) Montage potentiométrique

5-a) En supposant qu'aucun courant n'est appelé par le dispositif de mesure, R et C(x) sont branchées en série, et la relation du diviseur de tension s'écrit

$$U \cdot e^{i\varphi} = \frac{1/j \cdot C \cdot \omega}{R + 1/j \cdot C \cdot \omega} \cdot E = \frac{1}{1 + j \cdot R \cdot C \cdot \omega} \cdot E \text{ d'où } U = \frac{E}{\sqrt{1 + (R \cdot C \cdot \omega)^2}} \text{ et } \varphi = -\arctan(R \cdot C \cdot \omega)$$

5-b) $\sigma_U = \frac{\partial U}{\partial x} = -E \cdot \frac{R^2 \cdot C(x) \cdot \omega^2}{(1 + (R \cdot C(x) \cdot \omega)^2)^{3/2}} \cdot \frac{\partial C}{\partial x}(x)$ et $\sigma_\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{R \cdot \omega}{1 + (R \cdot C(x) \cdot \omega)^2} \cdot \frac{\partial C}{\partial x}(x)$

5-c-i) Ces deux sensibilités dépendent de C(x) donc ne sont pas indépendantes de x. Néanmoins en se plaçant à basse ou haute fréquence on remarque que :

$$\omega \ll 1/R \cdot C : \quad \left| \sigma_U \right|_{\text{B.F.}} \approx \frac{E \cdot R^2 \cdot \omega^2 \cdot C(x) \cdot C_{C0}}{L} \quad \left| \sigma_\varphi \right|_{\text{B.F.}} \approx \frac{R \cdot \omega \cdot C_{C0}}{L}$$

$$\omega \gg 1/R \cdot C : \quad \left| \sigma_U \right|_{\text{H.F.}} \approx \frac{E \cdot C_{C0}}{L \cdot R \cdot \omega \cdot C(x)^2} \quad \left| \sigma_\varphi \right|_{\text{H.F.}} \approx \frac{C_{C0}}{L \cdot R \cdot \omega \cdot C(x)^2}$$

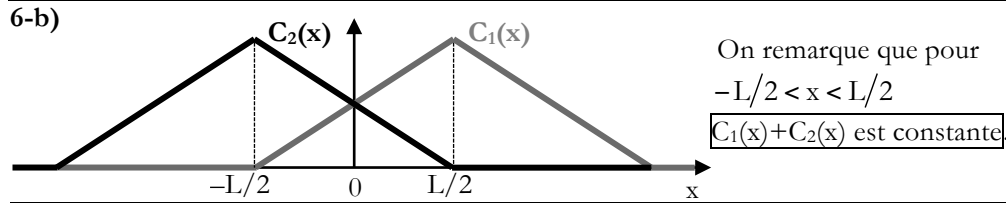
5-c-ii) L'amplitude de E modifie σ_U mais pas σ_φ .

5-c-iii) On a donc intérêt à utiliser la mesure de la phase φ car la sensibilité σ_φ est indépendante de E et peut être rendue indépendante de x si $\omega \ll 1/R \cdot C$.

6) Condensateur double

6-a) $L_1(x) = L/2 + x$ et $L_2(x) = L/2 - x$ (pour $-L/2 < x < L/2$)

donc $C_1(x) = \frac{2 \cdot \pi \cdot (L/2 + x) \cdot \epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}$ et $C_2(x) = \frac{2 \cdot \pi \cdot (L/2 - x) \cdot \epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}$ (pour $-L/2 < x < L/2$)



7) Montage en pont

7-i) En supposant qu'aucun courant ne circule dans le pont, les deux condensateurs et les deux résistances sont respectivement en série, donc, d'après la relation du diviseur de tension :

$$\underline{U} = \left(\frac{1/j.C_2.\omega}{1/j.C_1.\omega + 1/j.C_2.\omega} - \frac{R}{R+R} \right) . E \quad \text{d'où} \quad \underline{U} = \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} - \frac{1}{2} \right) . E.$$

7-ii) $\underline{U} = \left(\frac{L/2+x}{L} - \frac{1}{2} \right) . E$ soit $\underline{U} = \frac{x}{L} . E.$

7-iii) $\sigma_U = \partial U / \partial x = E/L$ cette sensibilité est indépendante de x, ce qui est très intéressant.

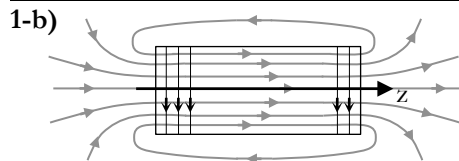
7-iv) Le déphasage de u(t) par rapport à e(t) ne peut prendre que deux valeurs : 0 lorsque $C_1 > C_2$ ou π lorsque $C_1 < C_2$. Il permet donc de connaître le signe de x.

B Étude d'un capteur inductif (12 %)

1) Champ créé par un solénoïde

1-a) La circulation du champ magnétostatique le long d'un contour fermé est égale au produit de la somme des courants traversant une surface s'appuyant ce contour, par la perméabilité magnétique du vide :

$$\oint \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 . I_{\text{enlacés}}$$



Justification des directions : le champ est uniforme dans le solénoïde, donc par conservation du flux du champ magnétique, les lignes de champ y sont parallèles. À l'extérieur le champ diminue, donc les tubes de champ s'évasent.

Justification du sens : le solénoïde est assimilable à un moment magnétique orienté dans le sens direct par rapport aux spires qui le constituent. Le champ magnétique sort du dispositif dans le même sens que le moment magnétique.

1-c)

Les lignes de courants à l'extérieur sont très éloignées les unes des autres. On en déduit que le champ est très faible (d'après la conservation du flux sur un tube de courant). Si la longueur du solénoïde tend vers l'infini, l'écart entre chaque ligne de courant tend également vers l'infini, le champ tend donc vers la valeur nulle

1-d) En poursuivant le raisonnement de la question précédente, si $r < R$, aucun courant n'est enlacé donc $(B(r) - B_{\text{axe}}) . \ell = \mu_0 . 0$ et

$$\vec{B}_{\text{int}} = \vec{B}_{\text{axe}} = \mu_0 \cdot \frac{N}{l_0} \cdot I_0 \cdot \vec{e}_z$$

1-e) Par définition, le flux propre du solénoïde s'exprime $\Phi_p = L_0 . I_0$, or $\Phi_p = N . S . B_{\text{axe}}$

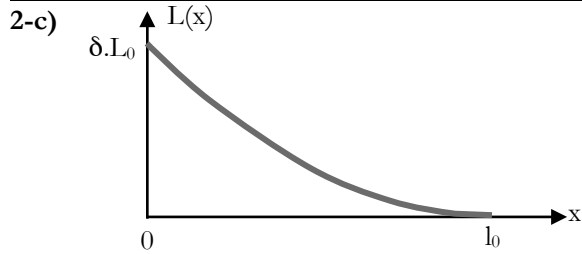
donc $L_0 = \frac{\Phi_p}{I_0} = N . \pi . R^2 . \mu_0 \cdot \frac{N}{l_0}$ soit $L_0 = \mu_0 . \pi . R^2 . N^2 / l_0$.

2) Capteur utilisant un solénoïde à noyau ferromagnétique mobile

2-a) Le nombre de spires de chaque portion étant proportionnel à la longueur de celle-ci : $N_1 = N . x / l_0$ et $N_2 = N . (l_0 - x) / l_0$.

2-b) D'après la question 1-e), $L_1 = \frac{\mu_0 . \pi . R^2 . N^2 . x^2}{l_0^2}$ et $L_2 = \delta . \frac{\mu_0 . \pi . R^2 . N^2 . (l_0 - x)^2}{l_0^2}$.

Or l'inductance totale vaut $L(x) = L_1 + L_2 \approx L_2$, car $\delta \gg 1$, donc $L(x) = \delta \cdot L_0 \cdot \left(1 - \frac{x}{l_0}\right)^2$



C Oscillateur mécanique (25 %)

1) Repos

1-a) D'après le principe fondamental de la dynamique, en l'absence de mouvement, la somme des forces sur chaque masse est nulle. Par projection selon l'horizontale, on en déduit que les deux ressorts ont pour longueur l_{R0} donc $x_{10} = l_{R0}$ et $x_{20} = 2 \cdot l_{R0}$.

1-b) En utilisant les données $T_1 = k \cdot |x_1 - l_{R0}|$ et $T_2 = k \cdot |(x_2 - x_1) - l_{R0}|$.

2) Mouvements de M₁ et M₂

2-a) Le principe fondamental de la dynamique appliqué à M₂ dans le référentiel du laboratoire s'écrit, en projection selon \vec{e}_x : $m \cdot \ddot{x}_2 = -k \cdot ((x_2 - x_1) - l_{R0})$ soit

$$\ddot{x}_2 + \frac{k}{m} \cdot x_2 = \frac{k}{m} \cdot x_1 + \frac{k}{m} \cdot l_{R0} \text{ . En identifiant } A = B = \frac{k}{m} \text{ et } C = \frac{k}{m} \cdot l_{R0}$$

2-b) Le principe fondamental de la dynamique appliqué à M₁ dans le référentiel du laboratoire s'écrit, en projection selon \vec{e}_x : $m \cdot \ddot{x}_1 = -k \cdot (x_1 - l_{R0}) + k \cdot ((x_2 - x_1) - l_{R0})$ soit

$$\ddot{x}_1 + \frac{2 \cdot k}{m} \cdot x_1 = \frac{k}{m} \cdot x_2 \text{ . En identifiant } D = \frac{2 \cdot k}{m} \text{ , } E = \frac{k}{m} \text{ et } F = 0 \text{ .}$$

3-a) Les amplitudes complexes de $XX_1(t)$ et $XX_2(t)$ vérifient les équations fournies :

$$\begin{cases} (j \cdot \Omega)^2 \cdot \underline{X}_{m2} = -\omega_0^2 \cdot (\underline{X}_{m2} - \underline{X}_{m1}) \\ (j \cdot \Omega)^2 \cdot \underline{X}_{m1} = -\omega_0^2 \cdot (2 \cdot \underline{X}_{m1} - \underline{X}_{m2}) \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} -\omega_0^2 \cdot \underline{X}_{m1} + (\omega_0^2 - \Omega^2) \cdot \underline{X}_{m2} = 0 & \text{(a)} \\ (2 \cdot \omega_0^2 - \Omega^2) \cdot \underline{X}_{m1} - \omega_0^2 \cdot \underline{X}_{m2} = 0 & \text{(b)} \end{cases}$$

3-b) En formant $\omega_0^2 \cdot (a) + (\omega_0^2 - \Omega^2) \cdot (b)$, on obtient

$$-\omega_0^4 \cdot \underline{X}_{m1} + (\omega_0^2 - \Omega^2) \cdot (2 \cdot \omega_0^2 - \Omega^2) \cdot \underline{X}_{m1} = 0 \text{ qui impose } \Omega^4 - 3 \cdot \Omega^2 \cdot \omega_0^2 + \omega_0^4 = 0 \text{ .}$$

On posant $\xi = \Omega^2$, $\xi^2 - 3 \cdot \omega_0^2 \cdot \xi + \omega_0^4 = 0$ de discriminant $\Delta = 5 \cdot \omega_0^4$, on obtient :

$$\xi = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \omega_0^2 \text{ d'où } \Omega_1 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} \cdot \omega_0 \approx 1,618 \cdot \omega_0 \text{ et } \Omega_2 = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} \cdot \omega_0 \approx 0,618 \cdot \omega_0 \text{ .}$$

4-a) Les masses sont au repos à $t=0$ donc $\dot{XX}_1(0) = \dot{XX}_2(0) = 0$ ce qui impose :

$$\begin{cases} -A_1 \cdot \Omega_1 \cdot \sin(\varphi_1) - A_2 \cdot \Omega_2 \cdot \sin(\varphi_2) = 0 \\ -A_1 \cdot \Omega_1 \cdot \sin(\varphi_1) + A_2 \cdot \Omega_2 \cdot \sin(\varphi_2) = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} A_1 \cdot \Omega_1 \cdot \sin(\varphi_1) = 0 \\ A_2 \cdot \Omega_2 \cdot \sin(\varphi_2) = 0 \end{cases}$$

On retient comme solutions $\varphi_1 = 0$ si $A_1 \neq 0$ et $\varphi_2 = 0$ si $A_2 \neq 0$.

4-b-i-1) On a alors $XX_1(0) = 0,5 \cdot l_{R0}$ et $XX_2(0) = 0,5 \cdot l_{R0}$ soit

$$A_1 + A_2 = 0,5 \cdot l_{R0} \text{ et } A_1 - A_2 = 0,5 \cdot l_{R0} \text{ d'où } A_1 = 0,5 \cdot l_{R0} \text{ et } A_2 = 0 \text{ .}$$

4-b-i-2) Les deux ressorts oscillent alors à la fréquence $f_1 = \Omega_1 / 2 \cdot \pi$

4-b-i-3) On a alors $XX_1(t) = XX_2(t)$, on parle de **mode symétrique** (*bors programme*).

$$4-b-i-4) \quad XX_2(t) = 0,5 \cdot l_{R0} \cdot \cos(\Omega_1 \cdot t) \text{ .}$$

4-b-ii-1) On a alors $XX_1(0) = 0,5 \cdot l_{R0}$ et $XX_2(0) = -0,5 \cdot l_{R0}$ soit

$$A_1 + A_2 = 0,5 \cdot l_{R0} \text{ et } A_1 - A_2 = -0,5 \cdot l_{R0} \text{ d'où } A_1 = 0 \text{ et } A_2 = 0,5 \cdot l_{R0} \text{ .}$$

4-b-ii-2) Les deux ressorts oscillent alors à la fréquence $f_2 = \Omega_2 / 2 \cdot \pi$.

4-b-ii-3) On a alors $XX_1(t) = -XX_2(t)$, **mode antisymétrique** (*bors programme*).

$$4-b-ii-4) \quad XX_2(t) = -0,5 \cdot l_{R0} \cdot \cos(\Omega_2 \cdot t) \text{ .}$$

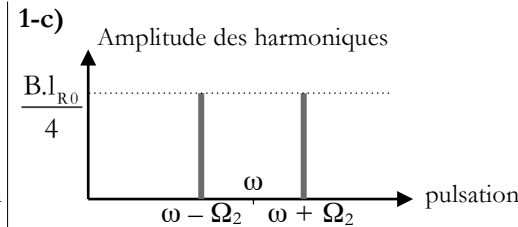
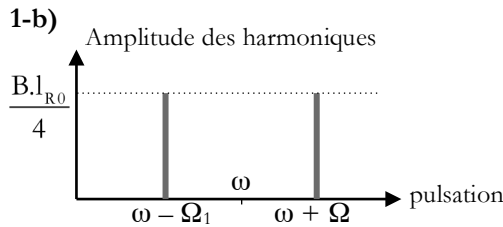
D Analyse des signaux par oscilloscope (13 %)

1) Spectre de u(t)

1-a) Dans les cas i ou ii de la question **C-4-b)** : $u(t) = B \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot A_{1\text{ou}2} \cdot \cos(\Omega_{1\text{ou}2} \cdot t)$ soit

$$u(t) = \underbrace{\left(B \cdot A_{1\text{ou}2} \cdot \cos(\Omega_{1\text{ou}2} \cdot t) \right)}_{\text{amplitude modulée à } \Omega_{1\text{ou}2}} \cdot \underbrace{\cos(\omega \cdot t)}_{\text{composante haute fréquence}} \quad (\text{modulation d'amplitude hors programme}).$$

En linéarisant, on obtient : $u(t) = \frac{B \cdot A_{1\text{ou}2}}{2} \cdot \left[\cos((\omega + \Omega_{1\text{ou}2}) \cdot t) + \cos((\omega - \Omega_{1\text{ou}2}) \cdot t) \right]$



2) Exploitation de chronogrammes

2-a-i) Mesure de la fréquence « électrique » : on compte environ 40 périodes « rapides » en 0,1 s donc $f_c = 40/0,1 = 400 \text{ Hz}$.

2-a-ii) Mesure de la fréquence « mécanique » : l'enveloppe a une période de 0,1 s donc $f_{m,1} = 1/0,1 = 10 \text{ Hz}$.

2-b) De même on mesure $f_c = 40/0,1 = 400 \text{ Hz}$ et $f_{m,2} = 2,5/0,1 = 25 \text{ Hz}$.

2-c) On en déduit $\Omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot f_{m,1} = 63 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\Omega_2 = 2 \cdot \pi \cdot f_{m,2} = 157 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

2-d) D'après **C-3-b)** $\frac{\Omega_1}{\Omega_2} \approx \frac{1,618 \cdot \omega_0}{0,618 \cdot \omega_0} = 2,6$, on a expérimentalement $\frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \frac{63}{157} = \frac{1}{2,5}$.

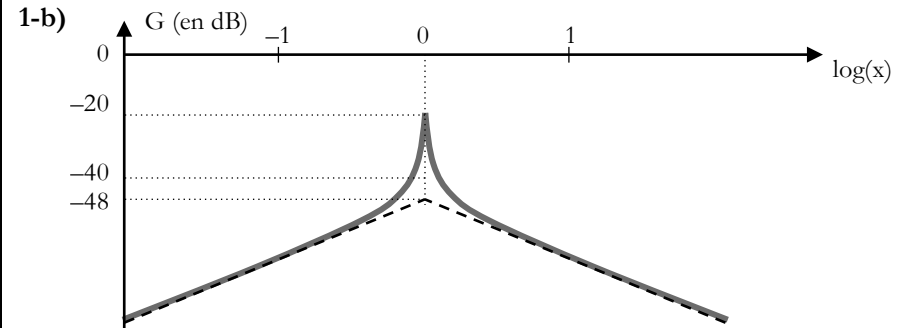
L'expérimentateur a dû inverser les enregistrements... en permutant, les mesures effectuées sont cohérentes avec la question **C-3-b)**.

E Conditionnement des signaux par oscillateur (20 %)

1) Étude du bloc 1

1-a) Les asymptotes du gain (en décibel) ont pour équation :

$$G_{\text{B.F.}} = 20 \cdot \log(x) + 20 \cdot \log(A_0/Q) \quad \text{et} \quad G_{\text{H.F.}} = -20 \cdot \log(x) + 20 \cdot \log(A_0/Q)$$



Représentation attendue ? (schéma asymptotique ou diagramme réel / allure ou tracé quantitatif).

1-c) Ils s'agit d'un filtre **passes-bande**.

1-d) Si le courant de sortie est nul, ce filtre est assimilable à un diviseur de tension entre

la résistance R_0 et une impédance $Z = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{jL \cdot \omega} \right)^{-1}$, on a alors :

$$u_2 = \frac{Z}{R_0 + Z} u_1 \quad \text{d'où} \quad H = \frac{1}{1 + R_0/Z} = \frac{1}{1 + \frac{R_0}{R} + \frac{R_0}{jL \cdot \omega}}$$

et $H = \frac{\frac{1}{1 + R_0/R}}{1 + j \cdot \left(\frac{R_0 \cdot C}{1 + R_0/R} \cdot \omega - \frac{R_0}{(1 + R_0/R) \cdot L \cdot \omega} \right)}$. Par identification, on détermine :

$$A_0 = \frac{R}{R + R_0}, \quad Q = \frac{R \cdot R_0 \cdot C}{R + R_0} \quad \text{et} \quad Q \cdot \omega_0 = \frac{R \cdot R_0}{(R + R_0) \cdot L} \quad \text{dont on déduit finalement}$$

$$Q = \frac{R \cdot R_0}{R + R_0} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad (\text{technicité du calcul excessive au regard du programme}).$$

2) Étude du bloc ALI

2-a) L'ALI est soumis à une rétroaction négative seule, il fonctionne donc en régime

linéaire, ainsi $e_- = e_+$ soit $\frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot u_3 = u_2$ (diviseur de tension), d'où $\boxed{\underline{G} = \frac{u_3}{u_2} = 1 + \frac{R_2}{R_1}}$.

2-b) $\boxed{K = |\underline{G}| = 1 + R_2/R_1}$.

3) Système bouclé

3-a) On a alors $u_3 = u_1$ ce qui impose $\underline{u}_3 = \frac{\underline{u}_2}{\underline{H}} = \frac{\underline{u}_3}{K \cdot \underline{H}} = \frac{1}{K \cdot A_0} \left(1 + Q \cdot \left(\frac{j\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{j\omega} \right) \right) \underline{u}_3$.

que l'on peut réécrire $(j\omega)^2 \cdot \underline{u}_3 + j\omega \cdot \frac{\omega_0}{Q} \cdot (1 - K \cdot A_0) \cdot \underline{u}_3 + \omega_0^2 \cdot \underline{u}_3 = 0$. En utilisant

l'équivalence entre représentation complexe et expression temporelle, on en déduit

l'équation différentielle vérifiée par u_3 : $\boxed{\frac{d^2 u_3}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \cdot (1 - K \cdot A_0) \cdot \frac{du_3}{dt} + \omega_0^2 \cdot u_3 = 0}$.

3-b-i) Si les oscillations sont quasi-sinusoïdales, l'équation du système doit être celle d'un oscillateur harmonique : le terme d'ordre un doit être nul ce qui impose $\boxed{K \cdot A_0 = 1}$.

3-b-ii) L'équation du système devient $\ddot{u}_3 + \omega_0^2 \cdot u_3 = 0$ donc la fréquence des oscillations est $\boxed{f_0 = \omega_0 / 2\pi}$.

3-c) Il s'agit d'un système du deuxième ordre qui est stable si et seulement si ses coefficients sont de même signe (*résultat au programme*). Si il n'y a initialement pas d'oscillations, celles-ci ne peuvent pas s'établir lorsque le système est stable ! Le démarrage des oscillations ne peut donc avoir lieu que si le système est instable, ce qui impose que $1 - K \cdot A_0 < 0$ soit $\boxed{K \cdot A_0 > 1}$.

4-a) On cherche des solutions de la forme $u_3(t) = S \cdot e^{r \cdot t}$, r doit alors vérifier l'équation caractéristique $r^2 - 10^4 \cdot r + 9 \cdot 10^8 = 0$ de discriminant

$\Delta = 10^8 - 4 \cdot 9 \cdot 10^8 = -35 \cdot 10^8 \approx (i \cdot 6 \cdot 10^4)^2$ et de solutions $r \approx (10^4 \pm i \cdot 6 \cdot 10^4) / 2$ d'où

$\boxed{u_3(t) = S_1 \cdot e^{(5 \cdot 10^3 + i \cdot 3 \cdot 10^4) \cdot t} + S_2 \cdot e^{(5 \cdot 10^3 - i \cdot 3 \cdot 10^4) \cdot t}}$

4-b) La solution précédente se factorise en $u_3(t) = e^{5 \cdot 10^3 \cdot t} \cdot (S_1 \cdot e^{i \cdot 3 \cdot 10^4 \cdot t} + S_2 \cdot e^{-i \cdot 3 \cdot 10^4 \cdot t})$ soit

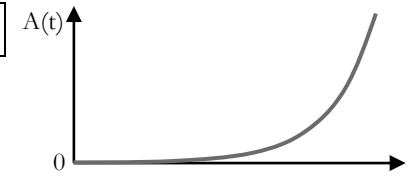
$u_3(t) = e^{5 \cdot 10^3 \cdot t} \cdot ((S_1 + S_2) \cdot \cos(3 \cdot 10^4 \cdot t) + i \cdot (S_1 - S_2) \cdot \sin(3 \cdot 10^4 \cdot t))$, or, comme $u_3(t)$ est réelle,

$S_1 + S_2$ est nécessairement réelle et $S_1 - S_2$ imaginaire pure (ce qui impose que S_1 et S_2 soient conjugués). On note $S_1 + S_2 = U_1$ et $i \cdot (S_1 - S_2) = U_2$ ce qui donne

$\boxed{u_3(t) = e^{5 \cdot 10^3 \cdot t} \cdot (U_1 \cdot \cos(3 \cdot 10^4 \cdot t) + U_2 \cdot \sin(3 \cdot 10^4 \cdot t))}$ ou $\boxed{u_3(t) = U \cdot e^{5 \cdot 10^3 \cdot t} \cdot \cos(3 \cdot 10^4 \cdot t + \varphi)}$

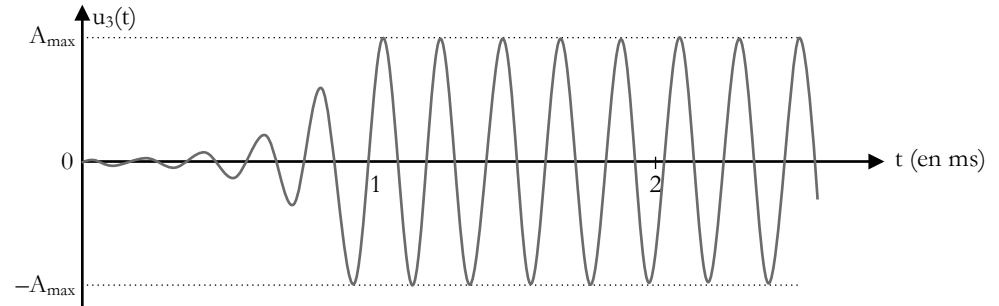
Il s'agit bien d'oscillations dont l'amplitude A varie temporellement.

4-c) $\boxed{A(t) = U \cdot e^{5 \cdot 10^3 \cdot t}}$



4-d) L'amplitude des oscillations ne peut pas diverger en pratique. Elle est limitée par la tension de saturation de l'ALI, ainsi $\boxed{A_{\max} = V_{\text{sat}} = 11 \text{ V}}$.

4-e)



5-a) D'après l'énoncé $f_{\text{osc}} = \frac{D}{\sqrt{C}} = \frac{D}{\sqrt{C_0 \cdot (1 - x/1)}} = \frac{D}{\sqrt{C_0}} \cdot (1 - x/1)^{-1/2}$ donc $f_{\text{or}} = \frac{D}{\sqrt{C_0}}$.

En linéarisant, $\boxed{f_{\text{osc}} = f_{\text{or}} (1 + x/(2 \cdot 1))}$ et en identifiant $\boxed{a = D / (2 \cdot 1 \cdot \sqrt{C_0})}$ et $\boxed{b = D / \sqrt{C_0}}$.

5-b) Ainsi $\Delta x = \frac{\Delta f}{a}$ donc $\Delta x_{\min} = \frac{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{C_0}}{D} \cdot \Delta f_{\min}$ et $\boxed{\Delta x_{\min} = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt{10^{-5}}}{1} \cdot 3 = 0,19 \text{ mm}}$

Corrigé proposé par Jean-Paul Fortin-Ripoche (jean-paul.fortin-ripoche@prepas.org)

N'hésitez pas à me contacter pour toute remarque, question ou erreur. Cette épreuve comporte 82 questions.