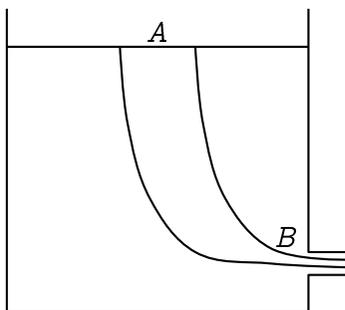


Correction devoir n°20 - CCP PC 2010 - II

PROBLÈME I OSCILLATEURS À RELAXATION

I.1 Vidange d'un réservoir

I.1.1 lignes de courant



I.1.2 Théorème de Bernoulli En régime d'écoulements stationnaires on peut écrire le long d'une ligne de courant :

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot z + P = Cste$$

Le premier terme représente l'énergie cinétique volumique, le deuxième l'énergie potentielle volumique de pesanteur et le dernier l'énergie volumique des forces pressantes. Dans le cas du problème on peut écrire cette relation entre un point A de la surface libre du réservoir où la pression vaut P_0 et le point B où la pression vaut aussi P_0 :

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_A^2 + \rho \cdot g \cdot h + P_0 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_B^2 + \rho \cdot g \cdot z_B + P_0$$

L'écoulement étant supposé stationnaire, le débit en B est le même qu'en A. On peut donc écrire $S \cdot v_A = \sigma \cdot v_B$ et en reportant dans l'expression ci-dessus :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{S} \right)^2 \cdot v_B^2 + g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot v_B^2 + g \cdot z_B \quad \frac{1}{2} \cdot v_B^2 \left(1 - \frac{\sigma^2}{S^2} \right) = g \cdot (h - z_B)$$

D'où on tire les résultats demandés :

$$v_B = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot (h - z_B)}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}}$$

$$D_s = \sigma \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot (h - z_B)}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}}$$

I.1.3 Valeur de

$$h = \frac{dh}{dt} = -v_A = -\frac{\sigma}{S} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot (h - z_B)}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}}$$

Lorsque $\sigma \ll S$ alors $\sigma^2/S^2 \ll 1$ est négligeable et :

$$v_B = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h - z_B)}$$

$$\dot{h} = -\frac{\sigma}{S} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (h - z_B)}$$

I.1.4 Application numérique Avec les données numériques de l'énoncé (transformées dans le système SI) on trouve :

$$D_s = 1,22 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} = 1,22 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$$

I.2 Influence du siphon

I.2.1 Débit sortant D_s Pour calculer ce débit il faut calculer la vitesse de l'eau dans le siphon en appliquant le théorème de Bernoulli. Pour cela il faut choisir deux points sur une ligne de courant dont on connaît la pression. Le plus simple est de prendre A et D où la pression vaut P_0 :

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_A^2 + \rho \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_D^2 + \rho \cdot g \cdot z_D + P_0 \quad g \cdot h = \frac{1}{2} v_D^2 + g \cdot z_D \quad v_D^2 = 2 \cdot g \cdot (h - z_D)$$

D'où la valeur de :

$$D_s = \sigma \cdot v_D = \sigma \sqrt{2 \cdot g \cdot (h - z_D)}$$

I.2.2

$$D_s = S \cdot v_A = -S \cdot \dot{h} = -S \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} + \frac{\sigma}{S} \sqrt{2 \cdot g \cdot (h - z_D)} = 0$$

1.2.3 Durée de vidange On exprime dt en fonction de dh et on intègre :

$$dt = -\frac{S}{\sigma\sqrt{2.g}} \cdot \frac{dh}{\sqrt{h-z_D}} = \frac{-2.S}{\sigma\sqrt{2.g}} \cdot \frac{d(h-z_D)}{2\sqrt{h-z_D}} \quad t_1 = -\frac{2.S}{\sigma\sqrt{2.g}} [\sqrt{h-z_D}]_{h_0}^{z_B}$$

d'où finalement la valeur de t_1 :

$$t_1 = \frac{S}{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot [\sqrt{h_0 - z_D} - \sqrt{z_B - z_D}]$$

1.3 Réservoir alimenté

1.3.1 Au débit de la surface libre du réservoir on ajoute le débit de la source et on écrit que la somme est égale au débit total en D soit :

$$-S \frac{dh}{dt} + D_i = D_s = \sigma \cdot \sqrt{2.g.(h-z_D)}$$

1.3.2 Si on cherche une solution stationnaire la surface libre du réservoir ne bouge pas et $\frac{dh}{dt} = 0$ d'où :

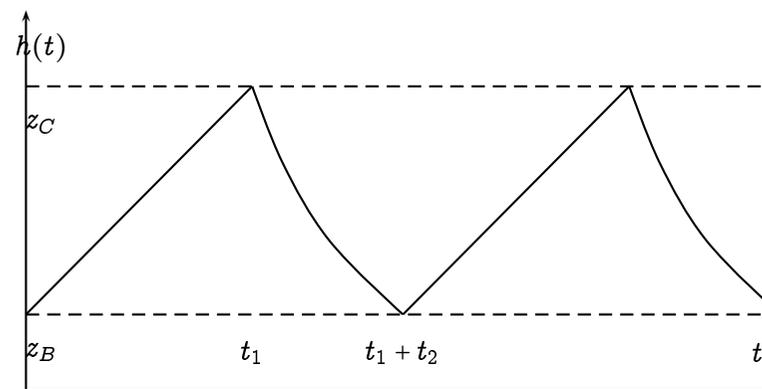
$$h_S = z_D + \left(\frac{D_i}{\sigma}\right)^2 \cdot \frac{1}{2.g}$$

Si $h_S < z_B$ le siphon n'est pas amorcé et le calcul fait est faux.

1.3.3 Lorsque le siphon est désamorcé le réservoir se remplit avec un débit constant et, tant que $h < z_C$ on a $h = D_i.t/S$

1.3.4 Si $D_i > D_s$ pour $h = z_C$ le siphon s'amorce mais le réservoir continue à se remplir plus lentement mais finit par déborder. Il faut donc que $D_i < D_s(h = z_C)$ soit $D_c = \sigma\sqrt{2.g.(z_C - z_D)}$. Quand h atteint z_C le siphon s'amorce et vide le réservoir car $D_i < D_s$ pendant un temps t_1 . Quand $h = z_B$ le siphon se désamorçe et le réservoir se remplit à nouveau pendant un temps $t_2 = S.(z_C - z_B)/D_i$ et le phénomène recommence.

1.3.5



La période des oscillations de relaxation vaut donc :

$$T = t_1 + t_2 = \frac{S.(z_C - z_B)}{D_i} + \frac{S}{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot [\sqrt{z_C - z_D} - \sqrt{z_B - z_D}]$$

1.3.6 Application numérique Avec les valeurs numériques de l'énoncé on trouve :

$$D_c = 6,26.10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \sim 0,63 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$$

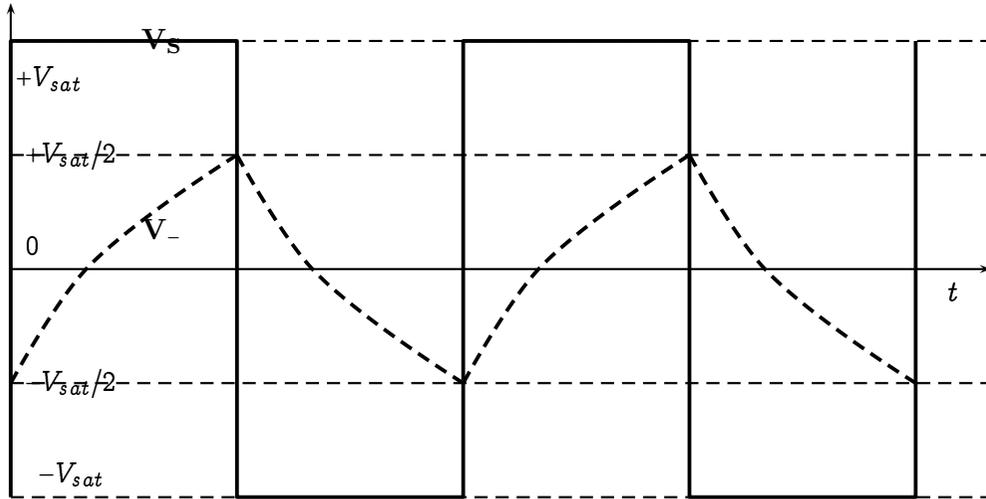
$$T = 860 \text{ s}$$

1.4 Analogie électronique

1.4.1 L'amplificateur opérationnel est supposé idéal : sa résistance d'entrée est infinie (pas de courant d'entrée), son amplification est infinie et, en régime de saturation, si $V_+ - V_- = \varepsilon > 0$ $V_S = +V_{sat}$. Dans le cas opposé $\varepsilon < 0$ $V_S = -V_{sat}$. Soit q la charge de l'armature du condensateur du côté de V_- et $i = dq/dt$ le courant de charge qui traverse la résistance R . On peut écrire :

$$V_S - V_- = R.i = R.dq/dt = R.C.dV_-/dt \quad R.C.dV_-/dt + V_- = V_S$$

1.4.2 Pour commencer supposons $V_S = +V_{sat}$, alors $V_+ = V_{sat}/2$. Tant que $V_- < V_{sat}/2$ le condensateur se charge à travers R jusqu'à ce que $V_- = V_{sat}/2 + \varepsilon$. La tension de sortie de l'A.O. bascule alors à $-V_{sat}$ et le condensateur se décharge jusqu'à ce que $V_- = -V_{sat}/2$ et le cycle recommence.



I.4.3 Afin d'avoir la durée de la charge, on peut faire l'étude suivante :

- La valeur initiale de la tension est $u_c(0) = -\frac{V_{sat}}{2}$
- En l'absence de basculement, on obtiendrait au bout d'une durée infinie $u_c(\infty) = V_{sat}$
- Le basculement a lieu pour $u_c(t_1) = +\frac{V_{sat}}{2} = \frac{3}{2} \cdot (u_c(\infty) - u_c(0))$

Or pour $t = \tau$, on a $u_c(\tau) = 0,63 \cdot (u_c(\infty) - u_c(0))$

On peut donc considérer que la durée de la charge est environ τ . Il en sera de même pour la décharge.

L'ordre de grandeur de la période T de l'oscillateur est de l'ordre de deux fois la constante de temps $R.C$ de la charge ou de la décharge soit $T = 2.R.C \sim 0,2 \text{ s}$.

I.4.4 Le rôle du réservoir qui stocke et déstocke de l'eau est tenu par le condensateur qui stocke et déstocke des charges électriques.

z_C est $+V_{sat}/2$ et z_B est $-V_{sat}/2$ qui sont les valeurs qui conditionnent le basculement d'un état à un autre.

Dans le cas du réservoir, l'énergie vient de l'eau qui arrive de l'extérieur, dans le

cas du montage électronique l'énergie est fournie par l'alimentation électrique de l'amplificateur opérationnel qui permet de faire circuler les courants électriques.

PROBLÈME II EFFET DOPPLER ET ONDES SONORES

II.1 Approche heuristique de l'effet Doppler

II.1.1 On peut traduire le phénomène de propagation par la relation, pour un état $s(x, t)$ de l'onde :

$s(0, t) = s(x, t + \frac{x}{c})$ avec c la vitesse de propagation de l'onde.

Les deux émissions aux instants t_i et t_{i+1} au niveau de la source seront donc perçus au niveau du point M aux instant $t'_i = t_i + \frac{d}{c}$ et $t'_{i+1} = t_{i+1} + \frac{d}{c}$. La durée entre les deux bips correspond donc à $\tau = t'_{i+1} - t'_i = t_{i+1} - t_i = \tau_0$

On en déduit : $\tau = \tau_0$

II.1.2

- La source émet un signal à l'instant t_i à l'abscisse x_i . Il doit parcourir la distance $d - x_i$ pour arriver en M . Il atteint donc M à l'instant $\theta_i = t_i + \frac{d - x_i}{c}$
- La source émet un signal à l'instant t_{i+1} à l'abscisse x_{i+1} . Il doit parcourir la distance $d - x_{i+1}$ pour arriver en M . Il atteint donc M à l'instant $\theta_{i+1} = t_{i+1} + \frac{d - x_{i+1}}{c}$
- Entre les deux instants d'émission, la source a parcouru la distance $x_{i+1} - x_i = v_0 \cdot \tau_0$

- L'intervalle entre les deux bips reçus correspond à

$$\begin{aligned} \tau(v_0) &= \theta_{i+1} - \theta_i = t_{i+1} - t_i + \\ &= \tau_0 - \frac{x_{i+1} - x_i}{c} = \tau_0 \cdot \left(1 - \frac{v_0}{c}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \tau(v_0) = \tau_0 \cdot \left(1 - \frac{v_0}{c}\right) \text{ et } f(v_0) = \frac{1}{\tau(v_0)} = \frac{f_0}{1 - \frac{v_0}{c}}$$

III.1.3 Il suffit de reprendre le raisonnement précédent en remplaçant v_0 par $-v_0$, ce qui donne

$$\tau(-v_0) = \tau_0 \cdot \left(1 + \frac{v_0}{c}\right) \text{ et } f(v_0) = \frac{1}{\tau(-v_0)} = \frac{f_0}{1 + \frac{v_0}{c}}$$

III.1.4 En se plaçant dans le référentiel lié au point M , on voit alors la source se déplacer à la vitesse $\vec{v} = v_0 \cdot \vec{u}_x$. On obtient donc $f'(v_0) = f(v_0)$

III.1.5 En se plaçant dans le référentiel lié au point M , on voit alors la source se déplacer à la vitesse $\vec{v} = -v_0 \cdot \vec{u}_x$. On obtient donc $f'(-v_0) = f(-v_0)$

PROBLÈME III EFFET DOPPLER ET ONDES SONORES

III.1 Approche heuristique de l'effet Doppler

III.1.1 Si c est la célérité du signal dans le référentiel choisi et d la distance parcourue le délai séparant l'émission d'un bip de sa détection vaut d/c .

III.1.2 Pendant le temps τ_i la source a parcouru la distance $v_0 \cdot \tau_i$. La distance entre la source et l'observateur est alors $d - v_0 \cdot \tau_i$. Le bip est reçu à l'instant $\theta_i = \tau_i + (d - v_0 \cdot \tau_i)/c = d/c + (1 - v_0/c)\tau_i$. De la même façon en remplaçant i par $i+1$ on a $\theta_{i+1} = d/c + (1 - v_0/c)\tau_{i+1}$. Le temps séparant deux bips successifs reçus par l'observateur est alors $\tau(v_0) = \theta_{i+1} - \theta_i$. Ce qui donne : $\tau(v_0) = (1 - v_0/c)\tau_0$ et $f_0 = f(v_0)/(1 - v_0/c)$

III.1.3 Comme on est dans le même référentiel il suffit de remplacer v_0 par $-v_0$ dans les formules précédentes et on a $\tau(-v_0) = (1 + v_0/c)\tau_0$ et $f(-v_0) = f_0/(1 + v_0/c)$.

On remarque que lorsque la source se rapproche de l'observateur la fréquence apparente augmente. Elle diminue dans le cas contraire. C'est le phénomène observé lorsqu'un véhicule qui utilise son avertisseur sonore arrive et passe devant l'observateur.

III.1.4 La source, immobile, émet un bip à l'instant τ_i . Désignons par θ'_i l'instant de la rencontre entre le bip et l'observateur. A cet instant l'abscisse du bip est $x = c(\theta'_i - \tau_i)$ et celle de l'observateur $d - v_0 \cdot \theta'_i$. En égalant ces deux valeurs on obtient :

$$(c - \theta'_i - \tau_i) = d - v_0 \cdot \theta'_i \quad (c + v_0) \cdot \theta'_i = d + c \cdot \tau_i \quad \theta'_i = \frac{d + c \cdot \tau_i}{c + v_0}$$

En faisant la différence entre cette valeur et la valeur suivante on obtient la valeur demandée de $\tau'(v_0)$:

$$\tau'(v_0) = \frac{\tau_0}{1 + v_0/c} \quad \text{et} \quad f'(v_0) = f_0 \cdot (1 + v_0/c)$$

III.1.5 De la même façon on remplace v_0 par $-v_0$ et on obtient :

$$\tau'(-v_0) = \tau_0/(1 - v_0/c) \quad \text{et} \quad f'(-v_0) = f_0 \cdot (1 - v_0/c)$$

III.2 Thermodynamique des ondes sonores

III.2.1 L'équation de LAPLACE pour le transformation adiabatique d'un gaz parfait s'écrit habituellement : $P \cdot V^\gamma = C \text{ ste}$. Ici on fait intervenir la masse volumique $\rho = m/V$, on écrira donc $P \cdot \rho^{-\gamma} = C \text{ ste}$:

$$P_0 \cdot \rho_0^{-\gamma} = P_1 \cdot \rho_1^{-\gamma}$$

Adiabatique réversible signifie "sans échange de chaleur réversible avec l'extérieur" soit $dQ_{rév} = 0$ et donc $dS = dQ_{rév}/T = 0$. L'entropie reste constante.

III.2.2 Prenons la différentielle logarithmique de l'équation de LAPLACE sous la forme demandée par l'énoncé :

$$P \cdot \rho^{-\gamma} = C \text{ Ste} \quad \frac{dP}{P_0} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad \chi_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right) = \frac{1}{\gamma \cdot P_0} = 7,07 \cdot 10^{-6} P_a^{-1}$$

Approximation acoustique Elle consiste à linéariser l'équation d'EULER et l'équation de conservation de la masse en négligeant les termes du second ordre en p et \vec{v} .

III.2.3 On écrit différemment l'expression de χ_S $\chi_S = \frac{1}{p} \frac{\delta \rho}{\rho_0}$. Il faut éliminer \vec{v} entre les deux équations. De la seconde on tire :

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) = -\chi_S \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)$$

En reportant cette relation dans la première équation il vient :

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div}(\vec{v})) = -\rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad} p} \quad \Delta p - \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

On obtient l'équation de d'ALEMBERT en posant $c^2 = 1/\rho_0 \chi_S$ ce qui donne en valeur numérique $c = 330 \text{ m.s}^{-1}$

III.3 Ondes longitudinales dans un fluide

III.3.1 $p(x, t) = P_m \cdot \cos(\omega_0 t - k_0 x) = P_m \cdot \cos[\omega_0(t - k_0 x/\omega_0)]$. $k_0 x/\omega_0$ est le retard temporel de l'onde à l'abscisse x et vaut donc x/c . En égalant les deux expressions on tire : $k_0 = \omega_0/c$. Par ailleurs $f_0 = \omega_0/(2\pi)$.

III.3.2 La seule variable d'espace est x . Le gradient de p a une seule composante sur Ox , il en est de même de \vec{v} . En projection sur Ox on a :

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} = -P_m \cdot k_0 \cdot \sin(\omega_0 t - k_0 x) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0 \cdot c} \omega_0 \cdot P_m \cdot \sin(\omega_0 t - k_0 x)$$

$-\omega_0 \sin(\omega_0 t - k_0 x)$ est la dérivée de $\cos(\omega_0 t - k_0 x)$ de sorte que :

$$v = \frac{1}{\rho_0 c} P_m \cos(\omega_0 t - k_0 x) = \frac{p}{\rho_0 c} \quad \frac{p(x, t)}{v(x, t)} = \rho_0 c$$

Ce rapport est constant, donc p et v sont solutions de la même équation aux dérivées partielles. L'auteur du corrigé a apprécié que l'auteur du sujet n'ai pas évoqué "l'impédance acoustique", bien que cette notion figure au programme, car elle est totalement obsolète et sans intérêt.

III.3.3 $v(x, t) = p(x, t)/\rho_0 c$ d'où :

$$\Delta v - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0 c} (\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}) = 0$$

III.3.4 Le microphone est à l'abscisse $x(t) = d + v_0 t$. La pression sonore qu'il reçoit est donc :

$$p(x, t) = P_m \cdot \cos(\omega_0 t - k_0 \cdot d - k_0 \cdot v_0 \cdot t) \quad p(x, t) = P_m \cdot \cos[(\omega_0 - k_0 \cdot v_0)t - k_0 \cdot d]$$

La pulsation $\omega_m(v_0)$ est le terme en facteur de t soit :

$$\omega_m(v_0) = \omega_0 \cdot (1 - \frac{v_0}{c}) \quad \text{et} \quad f_m(v_0) = f_0 \cdot (1 - \frac{v_0}{c})$$

III.3.5 La relation vérifiée par ω_1 et k_1 reste la même : $k_1 = \omega_1/c$.

A partir de l'instant $t = 0$ la source a parcouru une distance $v_0 t$ et se trouve donc à $x = v_0 t$. En reportant cette valeur dans l'expression de l'énoncé on trouve :

$$v_S(x, t) = V_m \cdot \cos(\omega_1 t - \frac{\omega_1}{c} v_0 t) = V_m \cdot \cos[\omega_1 (1 - \frac{v_0}{c}) t] = V_m \cdot \cos(\omega_0 t)$$

On en déduit :

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{1 - v_0/c} \quad \text{et} \quad f_m = \frac{f_0}{1 - v_0/c}$$

III.4 Vélocimétrie

III.4.1 En $x = 0$ la cloison est immobile. L'onde de vitesse est perpendiculaire à la cloison, comme la vitesse de la cloison est nulle la superposition de la vitesse de l'onde incidente et de l'onde réfléchie doit être nulle : $v = v_i + v_r = 0$ soit $V_i \cdot \cos(\omega_i t) + V_r \cdot \cos(\omega_r t) = 0$. En identifiant on trouve :

$$V_r = -V_i \quad \omega_r = \omega_i \quad k_r = -k_i$$

III.4.2 En tenant compte des simplifications de l'énoncé, on peut écrire sur la cloison les vitesses $v_i(t)$ et $v_r(t)$ sous la forme :

$$v_i(t) = V_i \cos(\omega_i t + \frac{\omega_i}{c} u \cdot t) = V_i \cos[\omega_i (1 + \frac{u}{c}) t] \quad v_r(t) = V_r \cos[\omega_r (1 - \frac{u}{c}) t]$$

En écrivant que $v_i(t) + v_r(t) = 0$ on tire $V_r = -V_i$ et $\omega_r(1 - u/c) = \omega_i(1 + u/c)$ soit :

$$\omega_r = \omega_i \frac{1 + u/c}{1 - u/c}$$

III.4.3 La fréquence de l'onde réfléchie vaut alors :

$$f_r = f_i \frac{1 + u/c}{1 - u/c}$$

L'observateur (la cloison) se déplace vers la source (fixe) et reçoit une onde de fréquence $f'_i(u) = f_i \cdot (1 + u/c)$. Il la renvoie vers O en jouant le rôle d'une source et O reçoit le signal comme un observateur fixe par rapport à la cloison de vitesse $-u$. Ce qui donne :

$$f_r(u) = \frac{f'_i(u)}{1 - u/c} = \quad \text{soit} \quad f_r = f_i \frac{1 + u/c}{1 - u/c}$$

III.4.4 Avec les valeurs numériques de l'énoncé $u/c \sim 3 \cdot 10^{-4}$, son carré sera largement négligeable devant 1 et $f_r \sim f_i \cdot (1 + 2u/c)$ et $f_r - f_i \sim 2 \cdot f_i \cdot u/c$. Tous calculs faits on trouve :

$$f_r - f_i = 5,88 \text{ Hertz} \sim 6 \text{ Hertz}$$

III.5 Conclusion En 3.4 la source est fixe et l'observateur s'éloigne de la source à la vitesse v_0 et on a $f_m(v_0) = f_0(1 - v_0/c)$.

En 3.5 l'observateur est fixe et la source se rapproche de l'observateur à la vitesse v_0 et on a $f_m(v_0) = f_0(1 + v_0/c)$. Dans un cas les deux objets s'éloignent et dans l'autre ils se rapprochent, il est donc normal que les fréquences soient différentes.

Par ailleurs la méthode heuristique utilise des fonctions (les bips) qui n'ont pas de dérivées et ne peuvent servir dans l'équation de d'ALEMBERT. La théorie des fonctions numériques ne s'applique pas. Il faudrait utiliser une représentation des grandeurs par un objet mathématique indéfiniment dérivable. Cet objet existe, mais n'est pas au programme des classes préparatoires : ce sont les distributions de Laurent SCHWARTZ et SOBOLEV. Un bip est représenté par une distribution de DIRAC et une succession périodique de bips par un peigne de DIRAC. Cela peut expliquer des petites différences entre les deux méthodes. Les radars au bord des routes nous montrent que l'effet DOPPLER fonctionne aussi avec les ondes électromagnétiques, mais celles-ci sont des ondes transversales qui n'ont pas les mêmes propriétés que les ondes longitudinales. Les calculs ne sont pas les mêmes.