Devoir 19 e3a PC 2010

A Injection d'un polymère fondu

A1 Écoulement de Poiseuille plan

A1-a

A1-a1

- L'invariance par translation se lon Oz permet d'écrire le champ des vitesses sous la forme $\overrightarrow{v}(M) = v(x,y,t).\overrightarrow{e_x}$
- L'écoulement étant incompressible, $div\overrightarrow{v} = \dfrac{\partial v_x}{\partial x} = \dfrac{\partial v(x,y,t)}{\partial x} = 0$, donc $\overrightarrow{v}(M) = v(y,t).\overrightarrow{e_x}$

A1-a2 On peut parler d'écoulement laminaire, cela pourra être confirmé par le calcul du nombre de Reynolds.

A1-b

η correspond au coefficient de viscosité dynamique, exprimé en Poiseuille.
$[\eta] = \dfrac{[F].L}{L^2.[v]} = \dfrac{M.L.T^{-2}.L}{L^2.L.T^{-1}} = M.L^{-1}.T^{-1}$

A1-c

Un fluide est Newtonnien s'il vérifie la loi proposée pour les forces de cisaillement.
Un fluide peut également être qualifié de parfaits (comme l'air), on néglige alors ces forces. Mais il existe également des fluides pour lesquels les forces de cisaillement prendront des expressions différentes.

A1-d

A1-d1 Pour l'effet de la pesanteur : $dF_g = \mu.g.dx.dy.dz$
Pour la viscosité : $dF_{visc} = \eta.S.\dfrac{\partial v}{\partial y}.dx.dz$

On en déduite le rapport $\dfrac{dF_g}{dF_{visc}} \simeq \dfrac{\mu.g.\frac{e}{2}}{\eta.V_{max}} \simeq 2,6.10^{-3}$
On pourra donc négliger les effets de la pesanteur devant les forces dues à la viscosité

A1-d2 Voir le cours pour établir que $\overrightarrow{dF_p} = -\overrightarrow{grad}p.d\tau$
Si on a une information à priori sur $\dfrac{\partial p}{\partial x} \simeq \dfrac{\Delta p}{\Delta x}$ soit : $\dfrac{dF_g}{dP_p} = \dfrac{\mu.g.L}{\Delta p} =$

A2 Profil de vitesse entre les plaques

A2-a

A2-a1 Par définition, $\overrightarrow{f}_v = \dfrac{\overrightarrow{dF_v}}{d\tau}$. Or on a montré que $\overrightarrow{dF_v} = +\eta.\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}.d\tau$, par conséquent

$$\boxed{\overrightarrow{f}_v = +\eta.\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}}$$

A2-a2

- L'écoulement étant stationnaire, $\dfrac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$
- Vu la description du champ des vitesses, $\left(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{grad}\right)\overrightarrow{v} = \left(v\dfrac{\partial}{\partial x}\right)v.\overrightarrow{e_x} = v.\dfrac{\partial v(y,t)}{\partial x}.\overrightarrow{e_x} = \overrightarrow{0}$
- On a montré que $\overrightarrow{f_g}$ était négligeable devant les autres actions.
- On en déduit donc que $\boxed{\overrightarrow{grad}p = \eta.\overrightarrow{\Delta}v}$

Ce qui donne, dans la base de projection, $\underbrace{\dfrac{\partial p}{\partial x}}_{\text{fonction de } x} = \underbrace{\eta.\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{\text{fonction de } y} = K$ seule dérivée non nulle.

Une égalité de deux fonctions de variables indépendantes impose que chacune de ces fonctions soit constante.

$\dfrac{\partial p}{\partial x} = K = \dfrac{p_0 - (p_0 + \Delta p)}{L - 0} = \dfrac{-\Delta p}{L} < 0$

On en déduit donc que $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} < 0$. L'extrémum de $v(y,t)$ correspondra donc à un maximum, ce qui tend à supposer que $v(y,t) > 0$. $\boxed{\text{L'écoulement se fait donc dans le sens opposé au gradient de pression}}$.

A2-b

A2-b1 On doit avoir égalité des vitesses à une interface entre un fluide visqueux et un autre fluide ou une paroi solide. Par conséquent ici, $\boxed{v\left(\pm\frac{e}{2}\right) = 0}$

A2-b2 On exploite la relation issue de l'étude précédente : $\eta.\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, soit

$\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \dfrac{K}{\eta}$

$\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{K}{\eta}.y + A$

$v = \dfrac{K}{2.\eta}.y^2 + A.y + B$ avec $\left|\begin{array}{l} v\left(\pm\frac{e}{2}\right) = 0 \ \rightarrow A = 0 \\ v\left(\frac{e}{2}\right) = \dfrac{K}{8.\eta}.e^2 + B = 0 \ \rightarrow B = \dfrac{-K}{8.\eta}.e^2 \end{array}\right.$

On obtient donc $\boxed{v(y) = \dfrac{\Delta p.e^2}{8.\eta.L}\left(1 - \left(\dfrac{2.y}{e}\right)^2\right)}$ et $\boxed{V_{max} = \dfrac{\Delta p.e^2}{8.\eta.L}}$

A2-c

A2-c1 Par définition, $Q_v = \iint_{(S)} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{dS}$

On choisit une section droite afin de calculer ce dibit, avec $vecdS = dy.dz.\overrightarrow{e_x}$, ce qui donne

$Q_v = \int_0^w dz. \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} V_{max}\left(1 - \left(\dfrac{2.y}{e}\right)^2\right) dy = w.V_{max}.\dfrac{2}{3}.e$

La vitesse moyenne $\overline{V} = \dfrac{Q_v}{w.e}$, soit $\boxed{\overline{V} = \dfrac{\Delta p.e^2}{12.\eta.L}}$

A2-c2 $V_{max} = 0,6\ m.s^{-1}$, $\overline{V} = 0,4\ m.s^{-1}$

Le nombre de Reynolds est défini tel que $\mathcal{R}e = \dfrac{\overline{V}.e.\mu}{\eta} = 8,3.10^{-3} \ll 1$. L'écoulement est donc bien laminaire.

A2-d

A2-d1 Par définition, $t = \dfrac{L}{\overline{\overline{V}}}$, donc de manière analogue $t_{min} = \dfrac{L}{V_{max}} = \dfrac{8.L^2.\eta}{\Delta p.e^2}$

$t_{moy} = \dfrac{L}{\overline{\overline{V}}} = \dfrac{L.w.e}{Q_v} = \dfrac{\mathcal{V}}{Q_v}$

On peut également donner l'expression, à partir de celle de la vitesse moyenne :

$t_{moy} = \dfrac{12.L^2.\eta}{\Delta p.e^2} = \dfrac{-12.L.\eta}{K.e^2}$

A2-d2 On a pour une ordonnée y : $t(y) = \dfrac{L}{v(y)} = \dfrac{8.\eta.L}{K.e^2.\left(1 - \left(\dfrac{2.y}{e}\right)^2\right)}$

On en déduit que $\boxed{\dfrac{t(y)}{t_{min} = \dfrac{1}{\left(1 - \left(\dfrac{2.y}{e}\right)^2\right)}}}$

Le temps de transit d'une particule proche des paroi tend vers l'infini.

A2-d3 $t_{moy} = 3\ s$ et $t_{min} = 2\ s$

B Thermique de l'injection

B1 Approche thermique

B1-a

B1-a1 Pour les points tels que $\dfrac{dv}{dy}$ soit maximum, c'est à dire $\boxed{\text{sur les bords}}$

B1-a2 Partant de $v(y) = \dfrac{3}{2}.\overline{V}.\left(1-\left(\dfrac{2.y}{e}\right)^2\right)$ On calcule $\dfrac{dv}{dy} = -\dfrac{3}{2}.\overline{V}.2.\dfrac{2.y}{e}$

On en déduit donc que $\mathcal{P}_{vol,visc} = \eta.\dfrac{36.\overline{V}^2.y^2}{e^4}$

Par intégration sur le volume total : $\mathcal{P}_{visc} = \int_0^L dx.\int_0^w dz.\int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \eta.\dfrac{36.\overline{V}^2.y^2}{e^4}.dy$

Après calcul, on trouve $\boxed{\beta = 24}$

B1-a3

- (i) : La puissance due à la viscosité est donc importante, or elle correspond à des dissipations par effet Joule : le polymère se réchauffe.
- (ii) : On va donc arriver à un régime permanent pour la température car la viscosité crée l'augmentation de température qui induit la diminution de la viscosité. Il y a un phénomène "d'asservissement"
- (iii) : ...

B1-a4 Un bilan thermodynamique sur une tranche dx de fluide donne :
$dU = \mu.c.d\tau.\dfrac{\partial T}{\partial x}.dt = \mathcal{P}_{vol,visc}.dt.d\tau$

On en déduit donc que $\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{36.\eta}{\mu.c.e}.\dfrac{\overline{V}^2}{e}$

Soit $\boxed{\varphi = \dfrac{36.\eta}{\mu.c.e}}$

AN : $\dfrac{dT}{dt} = 9$ %, l'élévation de température sera donc très rapide.

B1-b

B1-b1 On reprend le bilan thermodynamique proposé, il s'agit donc de calculer la dérivée particulaire :
$\dfrac{DT}{dt} = \dfrac{\partial T}{\partial t} + v.\dfrac{\partial T}{\partial x}$, ce qui donne l'ED :
$\mu.\left[\dfrac{\partial T}{\partial t} + v.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right] = \lambda.\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \eta.\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2$

B1-b2 En régime stationnaire, et considérant T indépendant de x, il vient que :
$\lambda.\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \eta.\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = 0$

B1-b3 En exploitant le profil de vitesse étudié dans la partie précédente,
$\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \dfrac{-\eta}{\lambda}.\left(V_{max}.\dfrac{2}{e}.\dfrac{y}{e}\right)^2 = \dfrac{-9.\eta.\overline{V}^2}{\lambda.e^2}.y^2$

Par intégrations et conditions aux limites : $T = \dfrac{-3.\eta.\overline{V}^2}{4.\lambda.e^2}.\left(y^4-\left(\dfrac{e}{2}\right)^4\right)+T_p$

On peut également en déduire $T_{max} = T_p + \dfrac{3.\overline{V}^2.\eta}{64.\lambda.e^2}$

C Troisième partie - Débimètres à orifice déprimogène

C1 Étude préliminaire d'un écoulement

Q1 - ne dépendent que de la variable x

Q2 - Ressèrement des lignes de courant au niveau de l'étranglement d'où une augmentation de la vitesse

Q3 - La loi de conservation de la masse s'écrit $\dfrac{D\rho}{Dt} + \rho.div\overrightarrow{v} = 0$. Or
L'écoulement est incompressible : $\dfrac{D\rho}{Dt} = 0$ donc $div\overrightarrow{v} = 0$
Le théorème d'Ostrogradski permet d'en déduire que $\iiint div\overrightarrow{v}\,d\tau = \iint \overrightarrow{v}\,.\,\overrightarrow{dS} = 0$
En prenant une surface formée d'un tube de courant et refermée des sections S_1 et S_2, on obtient alors

$$\iint_{S_1} \overrightarrow{v}\,.\,\overrightarrow{dS_1} + \iint_{tube} \overrightarrow{v}\,.\,\overrightarrow{dS} + \iint_{S_1} \overrightarrow{v}\,.\,\overrightarrow{dS_2} = 0$$

Soit $-D_{v1} + D_{v2} = 0$

Q4 - Elle traduit la conservation de l'énergie mécanique
Sur l'axe de révolution de la conduite (où $e_{pm} = C^{te}$) :

$$\frac{v_1^2}{2}\frac{P_1}{\rho_f} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho_f}$$

Q5 - La conservation du débit permet de prévoir l'augmentation de v pour une diminution du diamètre
La relation de Bernouilli permet de prévoir une augmentation de la pression pour une diminution de la vitesse

Q6 - Les deux relations données par Bernouilli et la conservation du débit permettent de trouver

$$P_2 = P_1 + \rho_f.\beta^4.\frac{v_2^2}{2} - \rho_f\frac{v_2^2}{2}$$

Ce qui donne $v_2 = \sqrt{\dfrac{2.\Delta P}{\rho_f.(1-\beta^4)}}$

Q7 - Pompe à vide

C2 Tube de Venturi

Q8 -
Éviter les turbulences

Q9 - Très faible section afin de ne pas perturber l'écoulement, orthogonal aux lignes de courant afin de ne pas constituer un point d'arrêt.

Q10 - Le mercure est statique, Bernouilli donne donc $e_{pm} + \dfrac{P}{\rho_{Hg}} = C^{te}$, soit comme $e_{pm} = g.h$

$$\Delta P = \rho_{Hg}.g.\Delta h$$

Q11 - $Q_V = \pi.\left(\dfrac{D_2}{2}\right)^2.v_2 = \pi.D_2^2.\dfrac{1}{4}.\sqrt{\dfrac{2.\Delta P}{\rho_f.(1-\beta^4)}}$, par conséquent $K = \pi.D_2^2.\dfrac{1}{4.\sqrt{(1-\beta^4)}}$