Mines Ponts PC – Physique II - Corrigé

1 –
Particule fluide : portion fermée mésoscopique de fluide – de dimensions typiques de l'ordre du micromètre.
Intérêt de cette notion: région du fluide sur laquelle le champs de vitesses peut être considéré comme uniforme.
Système fermé : système matériel n'échangeant pas de matière avec l'extérieur.
Système ouvert : portion de l'espace délimité par une surface (dite de contrôle) pouvant échanger de la matière avec l'extérieur.
Le point de vue **d'Euler** est généralement associé à l'étude de systèmes ouverts.
Le point de vue **de Lagrange** est généralement associé à l'étude de systèmes fermés de dimensions mésoscopiques (particules fluides).
La relation de Bernoulli est applicable pour un **fluide parfait incompressible étudié en régime permanent.**

2- Simplement $h_0 L^2 = D_v \times t$, donc $\boxed{h_0 = \dfrac{6{,}6\times10^{-3}\times89}{0{,}95^2} = 65\text{cm}}$

3- La pression dans le réservoir suit la loi hydrostatique : $P = P_0 + \rho g(h_0 - z)$. Le terme en P_0 est compensé par la pression de l'air extérieur et la force de pression sur la face de droite a donc une projection sur $\overrightarrow{e_x}$: $\boxed{F = \int_0^{h_0} \rho g(z - h_0)\times L dz = \frac{1}{2}\rho g {h_0}^2 L}$.
Les forces sur les autres faces ont même norme.

4- Le moment résultant selon l'axe Oy a pour valeur algébrique (sur la face de droite) :
$M^t{}_y = \int_0^{h_0} z\rho g(h_0 - z)\times L dz = \rho g \dfrac{{h_0}^3 L}{6}$. Si H est la hauteur du centre de poussée comptée depuis la base), on doit avoir $M^t{}_y = FH$, ce qui donne $\boxed{H = \dfrac{h_0}{3}}$.
Il est facile de voir par symétrie que le centre de poussée se trouve à la hauteur H, à mi chemin des deux arêtes verticales qui limitent la face.

5- Dans le référentiel du camion, en translation , l'accélération d'entrainement est $\vec{a_e} = -a\overrightarrow{e_x}$.
Tout se passe comme si le champ de gravitation $\vec{g}$ était remplacé par le champ $\vec{g'} = \vec{g} - a\overrightarrow{e_x}$.
Dans le référentiel du camion, la relation fondamentale de l'hydrostatique devient $\overrightarrow{grad}P = \rho\vec{g'}$: les surfaces équibares sont donc perpendiculaires à $\vec{g'}$: elles forment un angle $\boxed{\alpha = \arctan\left(\dfrac{a}{g}\right)}$ avec l'horizontale .

Par conservation du volume total, le point milieu de la surface libre doit rester à hauteur fixe.
L'amplitude maximale de variation de hauteur est donc $\boxed{\Delta h_0 = \dfrac{L}{2}\tan\alpha = \dfrac{L}{2}\dfrac{a}{g}}$ (d'un côté)
Numériquement : $\boxed{\Delta h_0 = 4{,}84\text{cm}}$

La résultante des forces exercées par l'eau sur le réservoir est opposée à la résultante des forces exercées par le réservoir sur l'eau , qui est à l'équilibre dans le référentiel mobile donc

$\boxed{\vec{F} = -m\vec{g'} = -\rho h_0 L^2\left(\vec{g} - a\overrightarrow{e_x}\right)}$.

6- L'air au dessus de l'eau est passé, à volume et quantité de matière constante de $T_0 = 288\text{K}$ à $T_i = 313\text{K}$. Donc $\boxed{P_i = \frac{P_0}{T_0}T_i = 1101\text{mbar}}$.

Le réservoir va se vider : l'air subit alors une détente isotherme jusqu'à ce que l'on ait :

$P_f - P_0 = -\rho gh$, avec $P_f\left(H-h\right) = P_i\left(H-h_0\right)$. Donc h vérifie : $\boxed{P_i\frac{H-h_0}{H-h} - P_0 = -\rho gh}$, qui est une équation du second degré en h.

La solution numérique physiquement acceptable ($< H$) est $\boxed{h = 0{,}642m}$. Le volume d'eau vidangé est donc $\boxed{(h_0 - h)L^2 = 7{,}2\,L}$. Enfin $\boxed{P_f = P_0 - \rho gh = 0{,}95\text{ bar}}$

Il risque de devenir **difficile de retirer le bouchon** !

7- Le **fluide est incompressible** : le débit volumique est le même le long du tuyau. Mais le tuyau de section constante, donc v est uniforme dans le tuyau. Par conséquent $\boxed{\vec{v}(x,t) = -v\overrightarrow{e_x}}$.

8- L'équation d'Euler intégrée le long d'une ligne de courant entre la surface et l'orifice donne $\int\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + grad\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v}\wedge rot\vec{v}\right)\cdot d\vec{\ell} = \int\left(\frac{-\overrightarrow{grad}\,P}{\rho} + \vec{g}\right)\cdot d\vec{\ell}$, soit, en considérant que la vitesse n'est non négligeable que dans le tuyau $\ell\frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{2} = gh_0$, donc $\boxed{k = \sqrt{gh_0}}$.

9- La vitesse constante solution est $\boxed{v_0 = \sqrt{2gh_0}}$.

Pour $w = \frac{1}{v+v_0}$ on a $\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\left(v+v_0\right)^2}\times\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2\ell}\frac{{v_0}^2 - v^2}{\left(v+v_0\right)^2} = -\frac{1}{2\ell}\frac{v_0 - v}{v_0 + v}$. Or $\frac{v_0 - v}{v_0 + v} = \frac{2v_0}{v_0 + v} - 1$ donc $\frac{dw}{dt} = \frac{1}{2\ell}\left(1 - 2v_0 w\right)$. On en déduit $\frac{1}{2v_0}\ln\left(2v_0 w - 1\right) = -\frac{t}{2\ell}$ et donc $w = \frac{1}{v_0}\left(\frac{1 + \exp\left(-v_0 t/\ell\right)}{2}\right)$ puis $v = v_0\frac{1 - \exp\left(-v_0 t/\ell\right)}{1 + \exp\left(-v_0 t/\ell\right)}$. Enfin $\tau = \ell / \text{v}_0$ donc $\boxed{v = v_0\frac{1 - \exp\left(-t/\tau\right)}{1 + \exp\left(-t/\tau\right)}}$.

10. Numériquement $\boxed{\tau = 0{,}22\text{s}}$. On veut $v\left(t_0\right) - v_0 = 0{,}01v_0$, qui conduit à $\boxed{t_0 = \tau\ln\left(199\right) = 1{,}19\text{s}}$.

11. On admet que la durée de vidange est très grande devant t_0 donc on considère que la vitesse est égale à sa valeur limite durant toute la vidange. Dans cette hypothèse :

$v_0 s t_v = h_0 L^2$, soit $\boxed{t_v = \frac{h_0 L^2}{v_0 s} = \frac{h_0 L^2}{v_0}\frac{4}{\pi\delta^2} = 523s}$

L'approximation était justifiée car $t_v >> t_0$.

12- Question de Cours.

13- Prenons comme système l'ensemble pompe + lance .

On a alors : $P_s = P_0$, $P_e = P_0 + \rho g h_0$, $v_s = \dfrac{4D_v}{\pi {d_2}^2}$ et $v_e = \dfrac{4D_v}{\pi {d_1}^2}$. On aura donc

$$\mathcal{P} = \rho D_v \times \left({D_v}^2 \times 8 \left(\left(\frac{1}{\pi {d_2}^2} \right)^2 - \left(\frac{1}{\pi {d_1}^2} \right)^2 \right) + gZ + gh_0 \right), \text{avec } Z = 20\,\text{m}.$$

Cette équation du troisième degré doit être résolue numériquement. On obtient $\boxed{D_{v\max} = 3{,}02\,\text{L.s}^{-1}}$.

La vitesse de l'eau en sortie est alors : $\boxed{v_{\max} = \dfrac{4D_{v\max}}{\pi {d_2}^2} = 19{,}6\,\text{ms}^{-1}}$

14- Si on prend la question au pied de la lettre , on doit calculer la force exercée par l'eau sur la lance, ce qui présente peut d'intérêt. La bonne question serait plutôt de calculer les forces exercées par l'ensemble des fluides (air compris) sur la lance. La réponse suivante est une réponse littérale à la question posée.
Le bilan de quantité de mouvement est classique. Le TRC appliqué au système fermé coïncidant à l'intérieur de la tuyère donne $-\overrightarrow{F_e} + \overrightarrow{F_{pression}} = D_m\left(\overrightarrow{v_s} - \overrightarrow{v_e}\right)$, avec

$\overrightarrow{F_{pression}} = P'_e \times \dfrac{\pi {d_1}^2}{4} - P_0 \times \dfrac{\pi {d_2}^2}{4}$, où P'_e est la pression qui règne sur la face d'entrée, c'est-à-dire, d'après la relation de Bernoulli : $P'_e = P_0 + \dfrac{\rho}{2}\left({v_s}^2 - {v_e}^2\right)$. Donc

$$\boxed{\overrightarrow{F_e} = -D_m\left(\overrightarrow{v_s} - \overrightarrow{v_e}\right) + P_0 \times \frac{\pi}{4}\left({d_1}^2 - {d_2}^2\right) + \frac{\rho}{2}\left({v_s}^2 - {v_e}^2\right) \times \frac{\pi {d_1}^2}{4}}.$$

(Remarque : si l'on calcule la force exercée par l'air et l'eau, on obtient la même expression sans le terme en P_0).

Numériquement, pour $D_v = 3{,}02\text{L.s}^{-1}$, $v_s = 19{,}6\,\text{ms}^{-1}$ et
$v_e = 19{,}6 \times (14/32)^2 = 3{,}75\,\text{ms}^{-1}$ $\boxed{F_e = 167\,\text{N}}$ (force dirigée vers l'avant, comme il se doit) . La force exercée par l'eau et l'air est seulement $F_e = 101\text{N}$.

15- Il s'agit d'un problème de chute libre, pour lequel : $z' = -\dfrac{1}{2} g \left(\dfrac{x'}{v_s \cos\alpha} \right)^2 + \tan\alpha x' + z'_0$ soit

$$\boxed{z' = -\frac{1}{2} g \frac{x'^2}{{v_s}^2}\left(1 + \tan^2\alpha\right) + \tan\alpha x' + z'_0}$$

16- La portée est la valeur de x'_0 pour laquelle $z' = 0$. En différentiant la relation

$0 = -\dfrac{1}{2} g \dfrac{{x'_0}^2}{{v_s}^2}\left(1 + \tan^2\alpha\right) + \tan\alpha x'_0 + z'_0$ par rapport à $u = \tan\alpha$ et en notant que pour le maximum $dx'_0 = 0$, on obtient : $0 = -\dfrac{1}{2} g \dfrac{{x'_{\max}}^2}{{v_s}^2} \times 2u\,du + x'_{\max}\,du$, donc $u = \dfrac{{v_s}^2}{g x'_{\max}}$ et

$$O = -\frac{1}{2} g \frac{{x'_{\max}}^2}{{v_s}^2} \times \left(1 + \left(\frac{{v_s}^2}{g x'_{\max}} \right)^2 \right) + \frac{{v_s}^2}{g x'_{\max}} x'_{\max} + z'_0, \text{ soit } 0 = -\frac{1}{2} g \frac{{x'_{\max}}^2}{{v_s}^2} + z'_0 + \frac{{v_s}^2}{g}. \text{ Donc}$$

$\boxed{x'_{\max} = \sqrt{\frac{2v_s^2}{g}} \times \sqrt{z'_0 + \frac{v_s^2}{g}}}$. Numériquement $\boxed{x'_{\max} = 56 \text{ m}}$.

17- Le temps de remplissage est donné par $Vs_a t_r = V_{soute}$ donc $\boxed{t_r = 24\text{s}}$. Pendant ce temps le Canadair parcourt $\boxed{d_r = 800\text{m}}$.

18- Dans le référentiel de l'avion, on peut considérer que l'écoulement est permanent. On peut donc appliquer la relation de Bernoulli entre l'entrée et la sortie de l'Auget :
$\frac{P_e}{\rho} + \frac{V^2}{2} + g \times 0 = \frac{P_s}{\rho} + \frac{V_s^2}{2} + g \times z_a$, avec $P_e = P_s = P_0$ et gz_a négligé on aura $V_s^2 = V^2$. Comme, de plus le fluide est incompressible, le débit volumique est conservé et la section du jet au contact de l'auget doit rester constante.

En effectuant le même bilan de quantité de mouvement pour l'auget que celui réalisé en question 14 : on a une force exercée sur l'Auget égale à
$\boxed{\overrightarrow{F_a} = -D_m\left(\vec{V} - \left(-\vec{V}\right)\right) = -2D_m\vec{V} = -2\rho s_a V^2 \overrightarrow{e_x}}$. Numériquement : $\boxed{\left|F_a\right| = 17 \times 10^3 \text{ N}}$.
La puissance développée est simplement $\boxed{\overrightarrow{F_a} \cdot \vec{V} = -2\rho s_a V^3 = -5{,}7 \times 10^5\, W}$. Cette puissance est à peu près égale au tiers de la puissance maximale d'un moteur.

Le pilote doit donc régler la puissance des moteurs et les régler à un régime suffisant pour qu'ils puissent compenser cette puissance.

19- C_z et C_x sont sans dimension.

20- La force $\vec{F}$ est essentiellement une force associée à la différence de pression entre l'intrados et l'extrados. Elle est dans une moindre mesure associée aux forces de viscosité exercées par l'air sur l'aile.

21- Si le pilote augmente la puissance, la vitesse augmente : la force de portance, qui reste verticale augmente donc : $\boxed{\text{l'avion monte}}$.

22- D'après la loi des gaz parfaits $\boxed{\rho_0 = \frac{P_0 M_a}{R_{gp} T_0}}$. Numériquement $\boxed{\rho_0 = 1{,}22 \text{ kg.m}^{-3}}$.

23- La relation d'équilibre de l'avion projetée sur $\overrightarrow{e_z}$ donne $C_z \times \frac{1}{2}\rho_0 S_a \times V_\infty^2 = mg/2$, donc $\boxed{C_z = \frac{mg}{\rho_0 S_a V_\infty^2}}$. De plus la puissance développée par un moteur équilibre la puissance de la force de trainée sur une aile : $\mathcal{P}_{\max} = C_x \times \frac{1}{2}\rho_0 S_a V_\infty^3$, donc $\boxed{C_x = \frac{2P_{\max}}{\rho_0 S_a V_\infty^3}}$. La finesse est alors $\boxed{f = \frac{mgV_\infty}{2P_{max}} = 5{,}5}$.

24- Pour une isentropique $\frac{dP}{P} - \gamma\frac{d\rho}{\rho} = 0$, donc $V_s^2 = \gamma\frac{P}{\rho} = \gamma\frac{P_0}{\rho_0}$, et $\boxed{V_s = \sqrt{\gamma\frac{P_0}{\rho_0}}}$.

25- On peut prendre pour L la longueur de corde et écrire, pour la vitesse maximum :
$N_R = \dfrac{(365/3.6)*3.562}{15.6\times 10^{-6}} = 2{,}3\times 10^7$. Le nombre de Reynolds choisi est donc obtenu pour une vitesse valant $\boxed{V = \dfrac{1{,}5}{2{,}3}\times V_{\max} \cong 240\,\mathrm{km.h^{-1}}}$.

La vitesse associée au nombre $N_M = 0{,}155$ est $\boxed{V = 53\,\mathrm{m.s^{-1}} = 190\,\mathrm{km.h^{-1}}}$. Avec cette vitesse et le nombre de reynolds choisi on obtient une longueur caractéristique : $\boxed{L = \dfrac{\nu N_R}{V} = 4{,}4\,\mathrm{m}}$. Celle longueur est un peu plus longue que la corde. Elle correspond peut être à la longueur d'un des bords de l'aile (ou peut être la longueur moyenne intrados-extrados).

Graphiquement la finesse maximale est obtenue en traçant la droite passant par O tangente à la polaire. La pente de cette droite est la finesse maximale. On trouve ici : $\boxed{f = \dfrac{2}{0{,}012} = 167}$.

Comme vu au 23, la finesse permet de déterminer le rapport $\dfrac{mgV}{\mathcal{P}}$ en vol horizontal: plus elle est élevée, plus la puissance nécessaire à maintenir en vol horizontal une masse donnée à une vitesse donnée est faible. Ou bien, à puissance donnée, une finesse élevée permet de maintenir en vol horizontal une masse importante, à vitesse donnée. Ou enfin, à puissance et masse donnée, une finesse élevée permet une vitesse de vol horizontal plus élevée.

26- La durée totale d'un aller retour est $t = \dfrac{1500}{(120/3.6)} + \dfrac{2\times 11}{320}\times 3600 + 190 = 483\,\mathrm{s}$ On peut faire environ 15 allers retours en 2 heures. La masse déversée est donc 91,5 m^3 d'eau par heure.

27- Un avion volant trop haut risque de manquer la cible – il ne peut voler trop bas pour des raisons de sécurité évidentes. L'intervalle 30-50 m est apparemment le meilleur compromis.