Sujet de physique 1 CCP PC 2014

corrigé pour l'UPS proposé par Philippe Borel (phiborel@numericable.fr) et Séverine Mensch (severine.mensch@wanadoo.fr) : merci de nous signaler tout problème qui nous aurait échappé !

Problème I : un vol en ballon

1.1 Statique des fluides incompressibles

1.1.1 question de cours : l'équilibre du fluide soumis à son poids et aux forces de pression impose après calculs

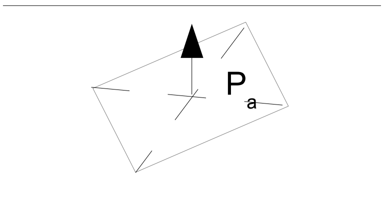
$\boxed{\overrightarrow{grad}\, P = \mu \vec{g}}$ soit, en projection sur l'axe Oz (verticale ascendante) $\boxed{\frac{dP}{dz} = -\mu g}$ (1)

1.1.2 l'intégration de la relation précédente dans le cas d'un fluide incompressible s'écrit :

$P(z) = P_o - \mu g z$ où $P_o = P(z=0)$

1.1.3 Enoncé du théorème d'Archimède : la résultante des forces de pression s'exerçant sur un corps solide totalement immergé dans un fluide est l'opposé du poids du fluide déplacé.

La poussée d'Archimède s'applique au centre de gravité du liquide déplacé, le solide étant homogène ainsi que le fluide, c'est en fait le centre géométrique du



parallélépipède.
Les forces de pression exercent une résultante non nulle, la notion de couple de torsion n'est pas appropriée. Fallait-il calculer le moment de cette force ? Par rapport à quel point ?

1.2 Modèle de l'atmosphère isotherme

1.2.1 loi des gaz parfaits : PV=nRT ou $\boxed{P = \mu \frac{RT}{A}}$ (2)

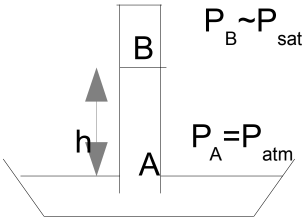
1.2.1 intégration de l'équation (1) avec (2') $\mu = P\frac{A}{RT}$ soit $\frac{dP}{P} = \frac{-gA}{RT} dz$ d'où

$\boxed{P(z) = P_o \exp\left(\frac{-z}{H}\right)}$ avec $\boxed{H = \frac{RT}{gA}}$ hauteur caractéristique de la décroissance de P.

AN : $H = \frac{8{,}31 * 280}{9{,}8 * 29 10^{-3}} = 8{,}2\ km$

1.2.3 AN $P = 1013 * \exp(-1{,}465/8{,}19) = 847\ hPa$

1.2.4 le tube de Toricelli est un tube rempli de mercure renversé sur une cuve elle-même remplie de mercure. La hauteur de mercure restant dans le tube donne la pression locale :



$P_A = P_B + \mu_{Hg} g h \approx \mu_{Hg} g h$ en négligeant la pression de vapeur saturante du mercure, donc au Puy de Dôme $h = \frac{P}{\mu_{Hg} g}$

AN : h= $h = \frac{847\,10^2}{9{,}8 * 1{,}35\,10^4} = 64\text{cm}$

1.2.5 l'équation (2') donne directement $\boxed{\mu(z) = \mu_o \exp(\frac{-z}{H})}$

pour une colonne semi-infinie de section a la masse est $m = \int_0^\infty \mu(z) a\, dz = a \mu_o H = a P_o \frac{A}{RT} \frac{RT}{g A} = \frac{a P_o}{g}$ ou encore $\boxed{mg = a P_o}$ le poids de la colonne d'air de section a est égal à la force de pression exercée au niveau du sol sur cette surface a, résultat qui traduit la condition d'équilibre de l'air et n'est donc pas surprenant.

1.2.6 On peut ainsi considérer que la couche d'atmosphère a une masse $M = \frac{S P_o}{g}$ où S=surface de la Terre $S = 4\pi R_T^2$

AN : $M = 4\pi (6380\,10^3)^2 \frac{1013\,10^2}{9{,}8} = 5{,}3\,10^{18}\,kg$ négligeable devant la masse de la Terre ($\approx 6\,10^{24}$kg)

1.3 Poussée d'Archimède dans un profil exponentiel de pression

1.3.1 le vecteur $\vec{e}_z$ est constant, donc $A_z = \vec{A}.\vec{e}_z = (\oiint_\Sigma -P \vec{n}\, dS).\vec{e}_z = \oiint_\Sigma -P \vec{e}_z \vec{dS}$:

A_z est bien le flux de $-P(z)\vec{e}_z$ au travers Σ.

1.3.2 d'où d'après le théorème de Green Ostrogradsky

$\boxed{A_z = \iiint_C d\,iv(-P\vec{e}_z) dxdydz}$ où C est le volume limité par la surface extérieur du corps, donc finalement le volume du corps.

1.3.3 Développement limité de l'exponentielle autour de z_G :

$$\boxed{\exp(\frac{-z}{H}) \approx \exp(\frac{-z_G}{H}) - \frac{(z - z_G)}{H} \exp(\frac{-z_G}{H}) + \frac{(z - z_G)^2}{2H^2} \exp(\frac{-z_G}{H})}$$

or $d\,iv(-P\vec{e}_z) = \frac{\partial(-P_o \exp(\frac{-z}{H}))}{\partial z} = \frac{P_o}{H} \exp(\frac{-z}{H})$

d'où $d\,iv(-P\vec{e}_z) \approx \frac{P_o}{H} [\exp(\frac{-z_G}{H}) - \frac{(z - z_G)}{H} \exp(\frac{-z_G}{H}) + \frac{(z - z_G)^2}{2H^2} \exp(\frac{-z_G}{H})]$

avec $\frac{P_o}{H} \exp(\frac{-z_G}{H}) = \frac{P_o A}{RT} g \exp(\frac{-z_G}{H}) = \mu_o \exp(\frac{-z_G}{H}) g = \mu(z_G) g$

donc $A_z=\iiint_C g\,\mu(z_G)\left(1-\frac{(z-z_G)}{H}+\frac{(z-z_G)^2}{2H^2}\right)dxdydz$

le premier terme vaut M, par définition de G le deuxième terme en ($z-z_G$) est nul, et enfin pour le troisième terme on utilise la décomposition proposée de $(z-z_G)^2$ pour reconnaître J_x+J_y et $-J_z$

finalement on obtient bien :

$$\boxed{A_z=\left[M+\frac{J_x+J_y-J_z}{4H^2}\right]g}$$

1.3.4 L'application simple du théorème d'Archimède consiste à écrire $A_z=Mg$, l'erreur relative commise est donc $\frac{\Delta A_z}{A_z}=\frac{J_x+J_y-J_z}{4MH^2}$ donc pour un ballon sphérique pour lequel $J_x=J_y=J_z=\frac{2MR^2}{5}$ $\boxed{\frac{\Delta A_z}{A_z}=\frac{R^2}{10H^2}}$

avec les valeurs numériques proposées $\frac{\Delta A_z}{A_z}=\frac{20^2}{10(8{,}2\,10^3)^2}=5{,}9\,10^{-7}$: l'erreur est tout à fait négligeable.

1.4 Ballon à air chaud dans une atmosphère isotherme

1.4.1 Le ballon contient de l'air, considéré comme un gaz parfait, à la pression extérieur et la température T_c donc $\mu_c=P(z)\frac{A}{RT_c}$ alors que pour l'air à l'extérieur $\mu(z)=P(z)\frac{A}{RT_f}$ donc $\boxed{\mu_c=\mu(z)\frac{T_f}{T_c}}$

1.4.2 le ballon s'élève spontanément si la poussée d'Archimède (résultante des forces de pression exercées par l'air extérieur sur le ballon) est de norme supérieure au poids total : enveloppe+nacelle+air chaud

il faut donc $\mu_o V=m_o\geq m+m_{air}$ avec $m_{air}=\mu_c V=\mu_o\frac{T_f}{T_c}V=m_o\frac{T_f}{T_c}$

la température T_c minimum vérifie $m_o=m+m_o\frac{T_f}{T_{min}}$ d'où $\boxed{T_{min}=T_f\frac{m_o}{m_o-m}}$

1.4.3 si l'air à l'intérieur est porté à une température supérieure à T_{min} le ballon va monter, il s'équilibrera lorsque la poussée d'Archimède compensera exactement le poids : $\mu(z)V=m+\mu_c V=m+\mu(z)\frac{T_f}{T_c}V$ d'où z_{max} tel que $\mu(z_{max})=\frac{mT_c}{V(T_c-T_f)}$

avec toujours $\mu(z)=\mu_o\exp\left(\frac{-z}{H}\right)$ donc $\boxed{z_{max}(m,T_c)=H\ln\left(\frac{m_o(T_c-T_f)}{mT_c}\right)}$

1.4.4 on cherche ici V : $V=\frac{mT_c}{\mu(Z)(T_c-T_f)}$ avec $T_c=T_f+60=340K$

AN $\mu(Z)=P_{oA}/(RT_c)\exp(-Z/H)=10^5.29\,10^{-3}/(8{,}31.280)\exp(-1/8{,}2)=1{,}10\,kg\,m^{-3}$
et $V=500.340/(60.1{,}10)=2{,}6\,10^3\,m^3$ ce qui correspond à un ballon sphérique de 8,5m de rayon.

1.4.5 le premier principe appliqué à l'air initialement contenu dans le ballon lors de l'élévation isobare de température s'écrit $Q=\Delta H=C_p(T_c-T_f)$ avec $C_p=nC_{pm}$ où n est la quantité de matière d'air initialement contenue dans le ballon : $n=\frac{m_o}{A}$ (rq : une partie de cet air s'échappe du ballon lors du chauffage puisque la pression est constante...). On obtient ainsi $\boxed{Q_1=\frac{m_o}{A}C_{p,m}(T_c-T_f)}$

1.4.6 lors de l'étape j, si on effectue toutes les étapes au sol, la relation établie au 1.4.1 s'écrit : $\mu_j=\mu_o\frac{T_f}{T_j}$, la masse d'air concernée par cette étape est $m_j=\mu_i V$ et le premier principe pour cette masse et cette étape s'écrit

$$\boxed{\delta Q_j=n_j C_{p,m}(T_{j+1}-T_j)=\mu_j\frac{V}{A}C_{p,m}(T_{j+1}-T_j)=\mu_o\frac{T_f}{T_j}\frac{V}{A}C_{p,m}(T_{j+1}-T_j)}$$

1.4.7 si on considère que chaque étape est infinitésimale, Q est déterminée en intégrant la relation précédente pour $dT=T_{j+1}-T_j$ et T_j variant entre T_f et T_C.

$$Q_2=\int\delta Q_j=\mu_o V\frac{T_f}{A}C_{p,m}\int_{T_f}^{T_c}\frac{dT}{T}$$ D'où $$\boxed{Q_2=m_o\frac{T_f}{A}C_{p,m}\ln(\frac{T_c}{T_f})}$$

rq : les expressions de Q_1 et Q_2 sont bien équivalentes pour T_c proche de T_f...

Sujet de physique 1 CCP PC 2014

corrigé pour l'UPS proposé par Philippe Borel (phiborel@numericable.fr) et Séverine Mensch (severine.mensch@wanadoo.fr) : merci de nous signaler tout problème qui nous aurait échappé !

Problème II : Quelques problèmes de diffusion thermique

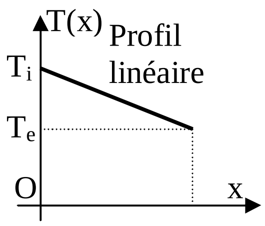
II.1 Gradient de température

-II.1.1 Soit un élément de volume dτ, de section A et de largeur dx. Effectuons un bilan d'énergie sur ce système entre les instants t et t+dt : $dU(t+dt)-dU(t)=\Phi_{Q,x}^{ent}.dt+\Phi_{Q,x+dx}^{ent}.dt$

en l'absence de terme de production interne, soit encore $\rho.c.A.dx.\dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t}dt = j_{Q,x}.A.dt - j_{Q,x+dx}.A.dt$

En régime stationnaire : $0=A.\dfrac{dj_Q(x)}{dx}.dx.dt$

Avec la loi de Fourier $\vec{j}_Q=-\overrightarrow{grad}\,T(x)=-\dfrac{dT(x)}{dx}.\vec{u}_x$ on obtient $\dfrac{d^2T(x)}{dx^2}=0$



La solution est T(x)=a.x+b soit avec les conditions aux limites

$$\boxed{T(x)=\left(\frac{T_e-T_i}{e}\right).x+T_i}$$

-II.1.2 $\boxed{\vec{j}_Q=-\lambda.\dfrac{dT(x)}{dx}.\vec{u}_x=\lambda.\left(\dfrac{T_i-T_e}{e}\right).\vec{u}_x}$

Par définition $\Phi(A)=\iint_A \vec{j}_Q.dS.\vec{u}_x$ soit $\Phi(A)=\iint_A \lambda.\left(\dfrac{T_i-T_e}{e}\right).dS$ et $\boxed{\Phi(A)=\lambda.\left(\dfrac{T_i-T_e}{e}\right).A}$

Le flux thermique est indépendant de la section considérée, donc en x=e/2 ou ailleurs… peu importe ! Cette propriété est conforme à un régime stationnaire, en l'absence de terme de création.

On peut écrire l'équation aux dimensions : $[\lambda]=\dfrac{[\Phi].L}{L^2.\theta}=[Puissance].L^{-1}.\theta.^{-1}$ soit λ en $W.m^{-1}.K^{-1}$

ou en fonction des dimensions fondamentales $[\lambda]=M.L^2.T^{-2}.L^{-1}.\theta.^{-1}=M.L.T^{-2}.\theta.^{-1}$

-II.1.3 En supposant que le manchot possède des plumes partout même sur la tête et … les fesses l'aire à considérer est l'aire $\boxed{A_1=(2.a^2)+(4.a.\ell)=2.a.(a+2.\ell)}$ A.N. $A_1=0{,}22m^2$

-II.1.4 En utilisant la continuité du flux thermique en x=0, $P_1=\Phi(A_1)=\lambda.\left(\dfrac{T_i-T_e}{e}\right).A_1$

D'où $\boxed{\lambda=\dfrac{P_1.e}{A_1.(T_i-T_e)}=\dfrac{P_1.e}{2.a.(a+2.\ell).(T_i-T_e)}}$ A.N. $\boxed{\lambda=4{,}0.10^{-2}\ W.m^{-1}.K^{-1}}$

-II.1.5 Pour l'ensemble des neufs manchots $\boxed{A_9=(2.9.a^2)+(4.3.a.\ell)=2.a.(9.a+6.\ell)}$
A.N. $A_9=0{,}78m^2$

Par continuité on recalcule la puissance totale métabolique nécessaire $\boxed{P_9=\Phi(A_9)=\lambda.\left(\dfrac{T_i-T_e}{e}\right).A_9}$.

A.N. $P_9=177W$.
Rapporté à un manchot, elle vaut $\boxed{P'=P_9/9}$.
Le facteur de réduction dû à ce « comportement social thermorégulateur vaut alors $\boxed{P'/P_1=0{,}40\ !}$

II.2 Equation de la chaleur

-II.2.1

Le phénomène de transfert thermique par conduction est un phénomène de transport d'énergie sans déplacement de matière apparent à l'échelle macroscopique. Naturellement à l'échelle microscopique, par chocs, les particules les plus agitées des zones chaudes cèdent de l'énergie aux particules les moins agitées des zones froides. Tandis que le phénomène de transfert thermique par convection provient du déplacement d'ensemble de matière, à l'échelle macroscopique.
Lorsque ces deux phénomènes existent comme dans un fluide, alors le transfert par convection est en général considéré le plus efficace.

-II.2.2

On remplace la solution $T_G(r,t)$ dans l'équation de la chaleur : $\dfrac{\partial T_G(r,t)}{\partial t} = D.\left(\dfrac{2}{r}.\dfrac{\partial}{\partial r}T_G(r,t) + \dfrac{\partial^2}{\partial r^2}T_G(r,t)\right)$

Les différents termes donnent après calculs : $\dfrac{\partial T_G(r,t)}{\partial t} = (\pi.C)^{-3/2}.t^{-5/2}\left(-\dfrac{3}{2}+\dfrac{r^2}{C.t}\right).\exp\left(-\dfrac{r^2}{C.t}\right)$

$$\frac{\partial T_G(r,t)}{\partial r} = -2.(\pi.C)^{-3/2}.\frac{t^{-5/2}}{C}.r.\exp\left(-\frac{r^2}{C.t}\right) \; ; \; \frac{\partial^2 T_G(r,t)}{\partial r^2} = -2.(\pi.C)^{-3/2}.\frac{t^{-5/2}}{C}\left(1-\frac{2.r^2}{C.t}\right).\exp\left(-\frac{r^2}{C.t}\right)$$

Par identification : C=4.D donc avec la définition du texte $\boxed{n=4}$.

-II.2.3 ♦Au voisinage de O, $\boxed{T_O(t) = T_G(0,t) = \dfrac{1}{(4.\pi.D.t)^{3/2}}}$; $\lim\limits_{t\to\infty} T_O(t) = 0$ la température en O décroît en $t^{-3/2}$ et s'annule aux grandes valeurs de t.

♦On cherche le rayon R(t) de la sphère dont la température est supérieure à $T_O(t)/2$ grâce à l'inégalité

$$T_G(R,t) > \frac{T_O(t)}{2} \Rightarrow (\pi.4.D.t)^{-3/2}.\exp\left(-\frac{R^2}{4.D.t}\right) > \frac{1}{2}.(\pi.4.D.t)^{-3/2} \Rightarrow \boxed{R(t) < \sqrt{4.D.t.Ln(2)}}$$

♦D'après la relation précédente, on peut dire que la diffusion thermique s'effectue sur une distance de l'ordre de R(t) soit de l'ordre de $\sqrt{D.t} = (D.T)^{\alpha}$ avec α=1/2.

II.3 Diffusion en présence de convection

-II.3.1 L'introduction d'une nouvelle condition aux limites en $r=R_s$ ne modifie pas l'équation « locale » de la chaleur à l'intérieur de la sphère : $\dfrac{\partial T(r,t)}{\partial t} - D.\Delta T(r,t) = 0$.

-II.3.2 En $r=R_s$, la continuité du flux thermique assure l'égalité entre le flux diffusif en $r=R_s^-$ et le flux convectif en $r=R_s^+$ soit : $j_Q(R_s,t).4.\pi.R_s^2 = \psi_s(t).4.\pi.R_s^2$ soit $\boxed{-\lambda\left.\dfrac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right|_{r=R_s} = h.(T_s(t) - T_e)}$

-II.3.3 Le changement de variable consiste à une translation de température, l'équation de la chaleur, équation aux dérivées partielles, reste de la même forme : $\boxed{\dfrac{\partial \Theta(r,t)}{\partial t} - D.\Delta\Theta(r,t) = 0}$. L'équation de continuité devient : $\boxed{-\lambda\left.\dfrac{\partial \Theta(r,t)}{\partial r}\right|_{r=R_s} = h.\Theta_s(t)}$

-II.3.4 ♦On remplace la solution $\Theta(r,t)=f(r).g(t)$ dans l'équation de la chaleur :

$$f(r).g'(t) - D.\left(\frac{2}{r}.f'(r).g(t) + f''(r).g(t)\right) = 0$$

soit en divisant par le produit f(r).g(t), la relation cherchée $\boxed{\frac{D}{f(r)}.\left(\frac{2}{r}.f'(r)+f''(r)\right)=\frac{g'(t)}{g(t)}}$.

♦Dans l'équation précédente, le membre de droite est une fonction de t uniquement et celui de gauche de r uniquement, deux variables indépendantes. Pour que ces deux fonctions restent égales quelque soient t et r, elles doivent être égales à une même constante réelle K : $\frac{D}{f(r)}.\left(\frac{2}{r}.f'(r)+f''(r)\right)=\frac{g'(t)}{g(t)}=K$

La solution s'écrit g(t)=A.exp(K.t) avec K négatif pour éviter tout phénomène de divergence dans le temps. Posons K=-1/τ et A=g(0) : $\boxed{g(t)=g(0).\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$.

-II.3.5 ♦On cherche une solution du type $f(r)=\frac{\sin(\alpha'.r)}{r}$. Je note ici le coefficient α', la notation α ayant déjà été utilisée en II.2.3.

On calcule $f'(r)=\frac{\alpha'.\cos(\alpha'.r)}{r}-\frac{\sin(\alpha'.r)}{r^2}$ et $f''(r)=-\frac{\alpha'^2.\sin(\alpha'.r)}{r^2}-\frac{2.\alpha'.\cos(\alpha'.r)}{r^2}+\frac{2.\sin(\alpha'.r)}{r^3}$

Et on remplace dans l'équation $D.\left(\frac{2}{r}.f'(r)+f''(r)\right)=K.f(r)=-\frac{1}{\tau}.f(r)$, il vient après simplification

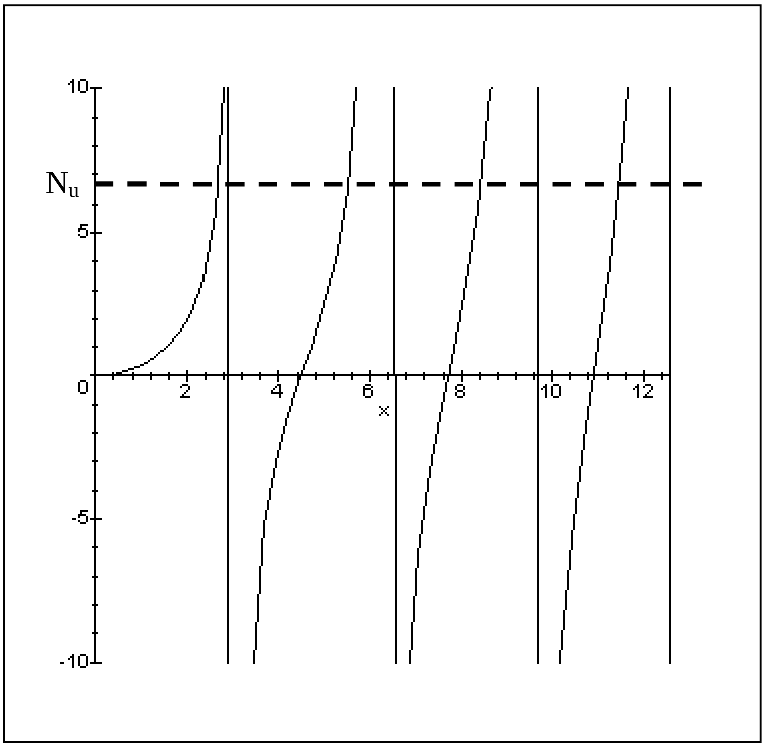
$-D.\tau.\alpha'^2\frac{\sin(\alpha'.r)}{r}=-\frac{\sin(\alpha'.r)}{r}$ relation valable quelque soit r à condition que $\boxed{D.\tau.\alpha'^2=1}$

♦Au voisinage de r=0 $f(r)=\frac{\sin(\alpha'.r)}{r}\approx\frac{\alpha'.r}{r}=\alpha'$ donc $\boxed{\lim_{r\to 0}f(r)=\alpha'}$.

-II.3.6 La condition $-\lambda\left.\frac{\partial\Theta(r,t)}{\partial r}\right|_{r=R_s}=h.\Theta_s(t)$ s'écrit après simplification

$-\lambda.f'(r=R_s)=h.f(r=R_s)$ soit $-\lambda\left(\frac{\alpha'.\cos(\alpha'.R_s)}{R_s}-\frac{\sin(\alpha'.R_s)}{R_s^2}\right)=h.\frac{\sin(\alpha'.R_s)}{R_s}$

En multipliant par $\frac{R_s^2}{\lambda.\sin(\alpha'.R_s)}$ et en posant x=α'.R_s on obtient bien la relation cherchée $\boxed{1-x.\frac{\cos(x)}{\sin(x)}=\frac{h.R_s}{\lambda}=Nu}$



-II.3.7 Au voisinage de 0 :

$\cos(x)\approx 1-\frac{x^2}{2}$ et

On $\sin(x)\approx x-\frac{x^3}{6}\approx x.\left(1-\frac{x^2}{6}\right)$

$f(x)=1-x.\cot g(x)\approx 1-\left(1-\frac{x^2}{2}\right).\left(1+\frac{x^3}{6}\right)\approx\frac{x^2}{3}$

Le tracé de f(x) donne sur [0,4.π], naturellement quelque soit la valeur de Nu positive il existe une voire une infinité de racine à la question précédente.

-II.3.8 Pour $x=\alpha'.R_s=\frac{R_s}{\sqrt{D.\tau}}$

On ne considère ici que la plus petite valeur de x soit sur l'intervalle [0,π].

Si Nu<<1 alors f(x) tend vers 0 ; soit $f(x)\approx\frac{x^2}{3}$ ou $Nu\approx\frac{R_s^2}{3.D.\tau}$ et la relation cherchée $\boxed{\tau\approx\frac{R_s^2}{3.D.Nu}}$

Si Nu>>1 alors f(x) tend vers ∞ ; soit $x \approx \pi$ pour la plus petite valeur et la relation cherchée $\boxed{\tau \approx \frac{R_s^2}{\pi^2.D}}$

-II.3.9 A.N. Nu=$1,66.10^{-2}$ <<1 donc $\tau=8,43.10^{3}$s=2h20'