Concours blanc PC **Physique I** **4 heures**

Le sujet comporte deux problèmes , l'un de porte sur les transferts thermiques concernant un composant électronique et le second sur l'utilisation d'un accéléromètre.
De nombreuses questions sont indépendantes.
Il sera tenu compte de la rédaction.

Problème n=°1 Refroidissement d'un composant électronique

On se propose d'étudier le refroidissement d'un composant électronique fonctionnant en régime permanent , une surchauffe trop importante liée à l'effet Joule pouvant entraîner une détérioration du composant.
En général , un composant électronique est constitué d'un support de résine (A) , d'épaisseur e_A et de conductivité thermique λ_A, sur lequel est déposé un substrat d'épaisseur négligeable dans lequel est noyé le conducteur (cf figures 1a et 1b)) .
Le substrat est recouvert d'une plaquette métallique , d'épaisseur e_B et de conductivité thermique λ_B.

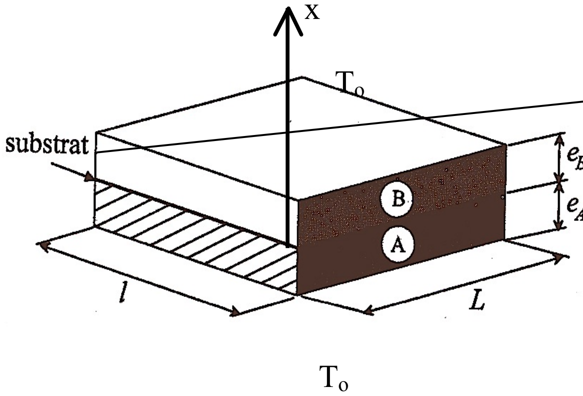


figure 1a)

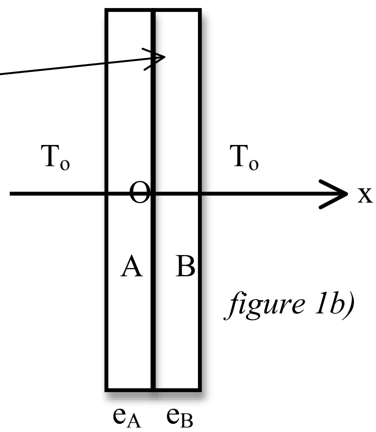


figure 1b)

Lorsque le composant est actif, le conducteur noyé dans le substrat dissipe une puissance uniforme Φ_s sur toute sa surface et sa température sera notée T_s.
Dans des conditions de fonctionnement continu, la température du substrat ne devrait pas excéder 70°C.
Les échanges convectifs des faces supérieure (pour B) et inférieure (pour A) avec le milieu ambiant sont caractérisés par un coefficient d'échange surfacique h.
La température de l'air ambiant est T_o.
Le régime est supposé stationnaire .
Etant donné les dimensions du composant, le transfert pourra être assimilé à un transfert unidirectionnel selon Ox , les échanges surfaciques latéraux étant négligeables.

Données numériques :
e_A=3mm ;λ_A=2 S.I. ;e_B=5mm ;λ_B=20 S.I. ;
L=10cm ;l=3cm ;2e=2mm ;
h=10Wm^{-2}K^{-1} ;T_o=20°C ;
Φ_s=10W .

I] Questions Préliminaires

1) Donner la loi de Fourier en indiquant les unités des différentes grandeurs.

2) On considère un matériau d'épaisseur e_i , de section S et de conductivité thermique λ_i.
Le régime est stationnaire et la diffusion thermique unidimensionnelle selon une direction perpendiculaire à la section S du matériau, soit Ox .
Exprimer la résistance thermique R_{thi} de ce matériau en fonction de e_i , λ_i et S .

3) Donner la loi de Newton caractérisant les échanges convectifs et en déduire de la même façon la résistance thermique d'un matériau dont le coefficient de transfert est h et la section S.

II] Calcul de la température T_s du substrat en régime stationnaire.

4) Représenter l'allure du profil de la température T(x) en reproduisant la figure 1b) sur votre copie.

5) Déterminer l'expression du flux thermique Φ_A traversant le support résine (A) et dissipé par la face inférieure en fonction de T_s-T_o , e_A , S , h et λ_A.

6) Montrer que le flux thermique Φ_B traversant la plaquette métallique (B) et dissipé par la face supérieure , peut s'écrire , en fonction de T_s-T_o , de la façon suivante : $\Phi_B = \dfrac{S}{\dfrac{e_B}{\lambda_B} + \dfrac{1}{h}}(T_s - T_o)$

7) En s'aidant d'un schéma électrique équivalent , exprimer le flux Φ_s total , dissipé par le substrat en fonction de T_s-T_o et des données du problème.

8) Calculer T_s et conclure.

III] Refroidissement du système électronique.

Pour remédier à l'échauffement du composant , on rajoute sur la plaquette métallique n ailettes .
Il s'agit de fines feuilles métalliques verticales , de même nature que la plaquette , destinées à accroître le refroidissement (cf figure 2).

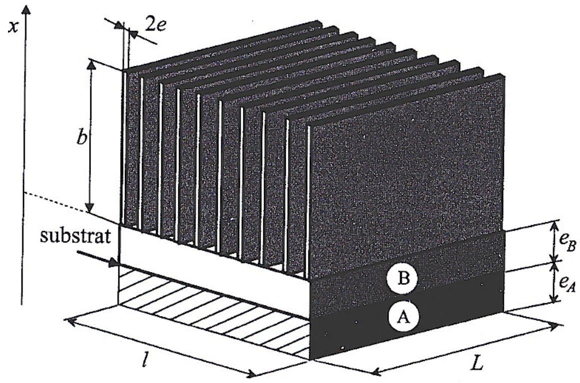


figure 2

On notera T_{pB} =T(x=0) , la température de surface externe de la plaquette soit par conséquent la température à la base des ailettes de hauteur b , de largeur L et d'épaisseur 2e .
On supposera que l'échange convectif sur les faces des ailettes est caractérisé par le même coefficient d'échange h défini précédemment.
On envisage une ailette de longueur b d'épaisseur 2e (e<< b , e<< L) et de largeur L (cf figure 3).

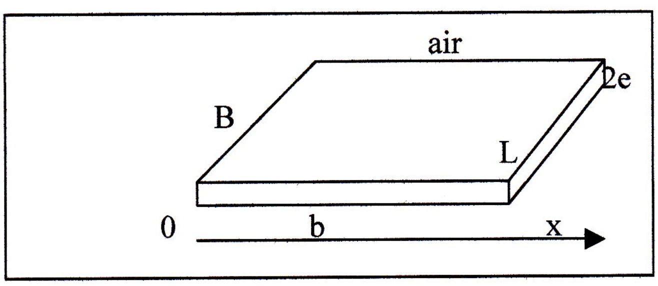


figure 3

9) Montrer que si l'on considère la température uniforme dans une section S =de l'ailette , soit T(x) , cela revient à considérer que $\frac{eh}{\lambda_B} << 1$ et $\frac{Lh}{2\lambda_B} << 1$. Est ce le cas ici ?

On considère pour la suite que la température T(x) est uniforme dans une section S=2eL de l'ailette.

10) Montrer en effectuant un bilan d'énergie sur une tranche dx d'ailette que la température T(x) dans l'ailette vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2}(T - T_o) = 0.$$

On exprimera δ en fonction de h , λ_B et e et on donnera aussi sa dimension.

11) Préciser la forme de la solution de cette E.D. en posant $\theta(x)=T(x)-T_o$.

Ecrire les conditions aux limites pour l'ailette en faisant apparaître des constantes A et B dans l'expression de $\theta(x)$. Ne pas résoudre le système d'équations.

12) Comment dimensionner le système afin de considérer l'ailette semi-infinie ?

Montrer que l'on a alors $T(x)=T_o + Ce^{-kx}$.

Préciser les expressions de C et k en fonction de T_{pB} ,T_o et δ.

On considère que l'expression précédente de T(x) reste valide pour la suite.

13) a)Déterminer l'expression du flux Φ_c dissipée par une ailette semi-infinie.

b) En déduire la résistance thermique équivalente de l'ailette.

c) Déterminer le flux Φ_o qui serait évacué en l'absence d'ailette et déterminer puis calculer le rapport $\eta = \frac{\Phi_c}{\Phi_o}$.

Conclure.

14) Déterminer l'expression du flux total Φ_T dissipé à la surface externe de la plaquette métallique en fonction de n,λ_B,δ ,h ,e ,L ,l ,T_{pB} et T_o .

Ce flux est supposé égal à la somme du flux dissipé par les n ailettes et du flux dissipé par la surface restante (non muni d'ailettes).

15) En déduire la nouvelle expression de Φ'_B traversant la plaquette métallique (B) et dissipé par la face supérieure en fonction de (T_s-T_o) et des données du problème.

16) Reprendre le bilan thermique du composant (résine+plaquette métallique) muni de n ailettes et déterminer le flux Φ_s total , dissipé par le substrat en fonction de T_s-T_o et des données du problème.

17) Calculer T_s pour n=10 et vérifier que le résultat correspond maintenant à de bonnes conditions de fonctionnement.

18) Si le contact entre la plaquette métallique B et les n ailettes n'est pas correctement établi , il existe alors une résistance thermique dite « de contact » pouvant atteindre environ 10K/W entre B et une ailette.

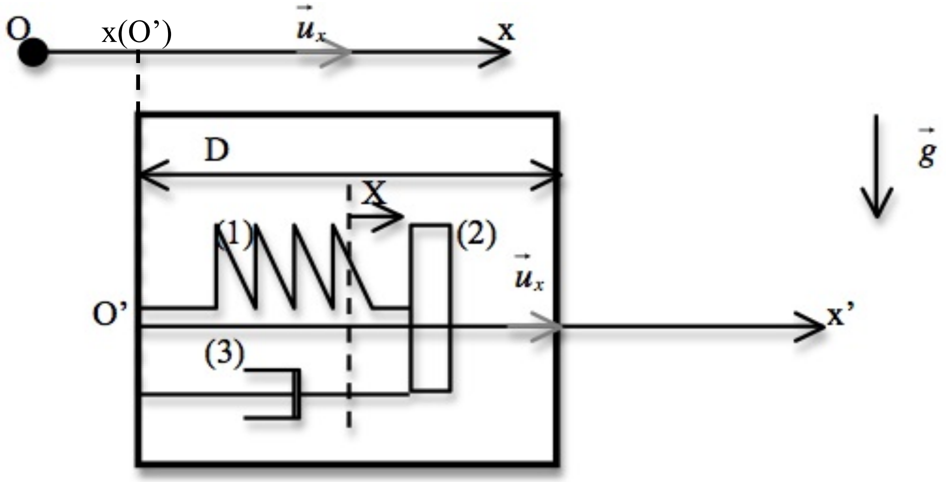
Calculer , dans ce cas , la nouvelle température T'_s du substrat et conclure sur l'utilisation d'une pâte thermique pour remédier au problème .

Fin du premier problème

Deuxième problème
Principe et utilisation d'un accéléromètre.

Le principe d'un accéléromètre est schématisé sur la figure ci-dessous.
L'accéléromètre se compose d'une masse d'épreuve m , astreinte à se déplacer sans frottement selon un axe (O'x') solidaire du boîtier .La masse d'épreuve (2) est reliée au boîtier par un ressort (1) de raideur k .
On note X la position de la masse d'épreuve par rapport au centre du boîtier et la position au repos de la masse d'épreuve est X=0.
Une partie de ce solide est solidaire d'un amortisseur (3) exerçant sur (2) la force de frottement fluide $\vec{f} = -h\vec{v}(M/R')$ où h est une constante et $\vec{v}(M/R') = \frac{dx'}{dt}\vec{u}_x$ est la vitesse de translation de (2) par rapport au boîtier et $\vec{u}_x$, un vecteur unitaire porté par l'axe O'x'.

On définit aussi un axe Ox horizontal et fixe dans un référentiel galiléen $\Re$ permettant de rendre compte du mouvement du boîtier , soit $x_{O'}(t)$.



I] étude Mécanique du dispositif

1) Rappeler la définition d'un référentiel galiléen.

2) A quelle condition le référentiel $\Re$'(O',x') , lié au boîtier est-il galiléen ?
Le boîtier se déplace dans un référentiel $\Re$(O,x) supposé galiléen et on note $\vec{a} = a(t)\vec{u}_x$ son accélération dans ce référentiel.
On suppose que l'accéléromètre garde une orientation fixe et horizontale selon l'axe Ox (soit $\vec{u}_x$).

3) Ecrire le PFD pour le solide (2) dans le référentiel $\Re$'(O',x') lié au boîtier en explicitant chaque terme.

4) Montrer que l'on obtient l'E.D. suivante : (1) $\frac{d^2X(t)}{dt^2} + \frac{w_o}{Q}\frac{dX(t)}{dt} + w_o^2X(t) = -a(t)$

Exprimer w_o , Q en fonction des données du problème.
A quoi correspondent ces deux grandeurs ?

On suppose que l'accéléromètre ainsi que sa masse d'épreuve sont immobiles pour des temps t négatifs et que l'accéléromètre subit une accélération constante $\vec{a} = a_o\vec{u}_x$ pour des temps positifs.

5.1) Donner l'expression de la solution de l'équation différentielle dans le cas où $Q > \frac{1}{2}$.
On ne cherchera pas à déterminer les constantes qui apparaissent dans l'expression.

5.2) Montrer que X(t) tend vers une valeur stationnaire dont on donnera l'expression.

Donner un ordre de grandeur du temps de réponse de l'accéléromètre pour que X(t) atteigne le régime stationnaire dans le cas où $Q>\frac{1}{2}$.

5.3) Tracer l'allure de X(t) selon les différentes valeurs de Q possible et préciser le nom des différents régimes. Pour quelle valeur de Q , le temps de réponse est-il minimum ?
D'après la fiche constructeur , un accéléromètre ADXL possède les caractéristiques suivantes :
$w_o=2\pi*5500$ rad/s et Q=5.
En déduire le temps de réponse de l'accéléromètre ainsi que celle du déplacement stationnaire de la masse d'épreuve pour une accélération de 1g. Conclure.
$g=10ms^{-2}$.

On considère maintenant un mouvement sinusoïdal du boîtier tel que : $x(O')=B_o\cos(wt)$.
On pose $\underline{x} = B_o e^{iwt}$.
On a ainsi $x(O') = R_e(\underline{x})$
On cherche la solution $X(t)=X_o\cos(wt+\Psi_o)$ en régime sinusoïdal forcée dû à l'accélération a(t) du boîtier ou au mouvement x(t) du boîtier.
La forme complexe associée à X(t) est $\underline{X} = \underline{X}_o e^{iwt}$ avec $\underline{X}_o = X_o e^{i\psi_o}$
L' accélération du boîtier est notée : $a(t) = A_m\cos(wt)$
Sous forme complexe :

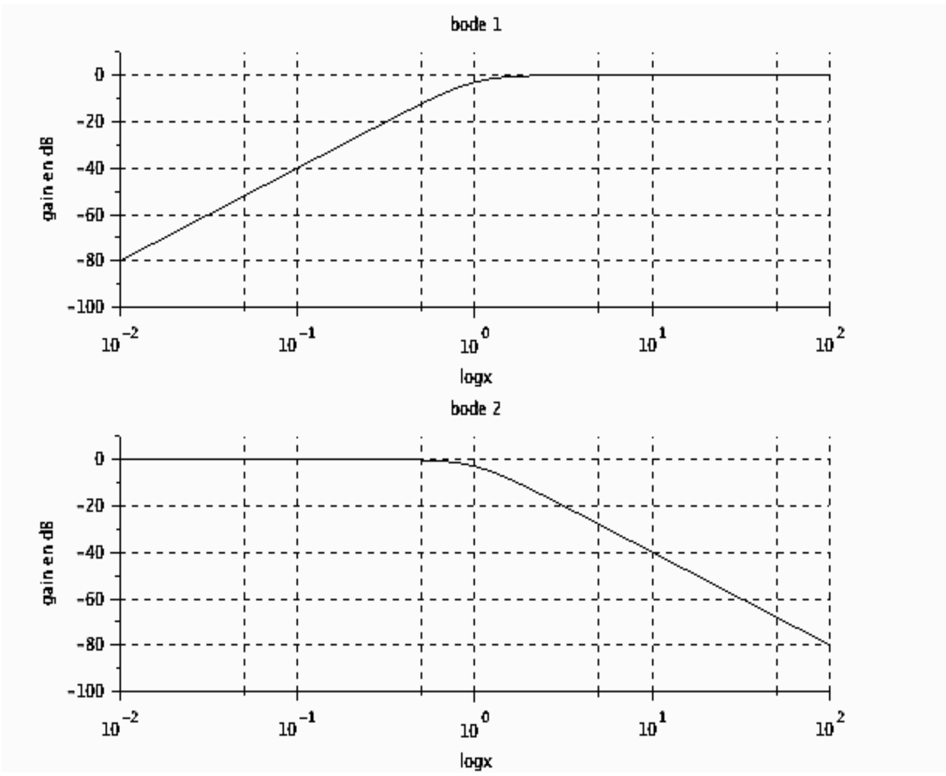
$$\underline{a} = A_m e^{jwt}$$

6.1) Etablir les fonctions de transfert mécanique $\underline{H}_1 = \frac{\underline{X}}{\underline{x}}$ puis $\underline{H}_2 = \frac{\underline{X}}{\underline{a}}$

Montrer que : $\underline{H}_2 = -\frac{G}{1-\xi^2+i\frac{\xi}{Q}}$ et $\underline{H}_1 = \frac{-\xi^2}{1-\xi^2+i\frac{\xi}{Q}}$;

On exprimera ξ , G en fonction de w et w_o.

6.2) Parmi les deux diagrammes de Bode proposés ci-dessous lequel semble convenir à chaque fonction de transfert ? On a pris G=1 , $Q=\frac{1}{\sqrt{2}}$ pour le tracé et « x » = « ξ »



On souhaite préciser le fonctionnement optimum du système tel qu'il réalise la mesure de l'accélération du boîtier , soit un « accéléromètre ».

7.1) Déduire des résultats précédents, un régime de pulsation , pour lequel une mesure de X_o permet de déterminer l'accélération A_m subie par le système .

En déduire une plage de fréquence mesurable pour l'accélération si $w_o=2\pi*5500$ rad/s et $Q=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

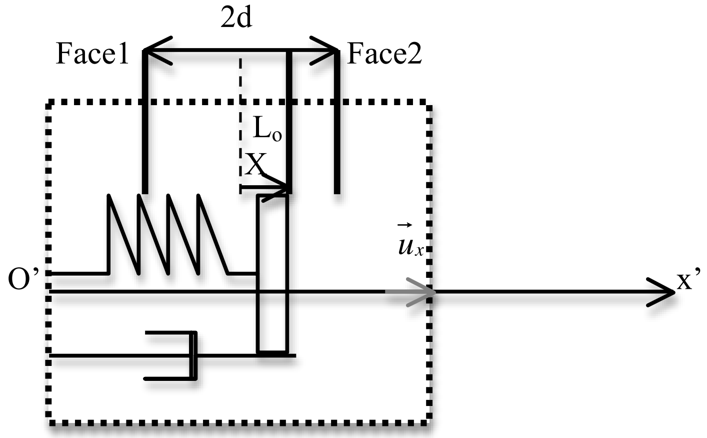
Conclure.

7.2) Quel aurait été le principal inconvénient si Q=5 ? Justifier votre réponse.

7.3) On défini la sensibilité σ de l'accéléromètre par la valeur absolue du quotient du déplacement ΔX_o par la variation de l'accélération Δa qui provoque ce déplacement.
Exprimer σ en fonction la pulsation propre w_o en tenant compte des résultats précédents.

II] Etude du capteur

Le suivi du déplacement de la masse d'épreuve est assuré par un capteur capacitif comme le montre la figure ci-dessous.
Le mobile est solidaire d'une lame L_o pouvant se déplacer devant les faces 1 et 2 (ces deux faces sont solidaires du boîtier et distantes de 2d).
La face 1 et la lame L_o forment un condensateur C_1.
La face 2 et la lame L_o forment un condensateur C_2.
Ces capacités dépendent de la position de la lame L_o , soit X.



8) Soient deux plaques parallèles , chacune de surface S , séparées par une distance e petite devant les autres dimensions. On néglige les effets de bords .La première plaque porte la charge Q et la seconde la charge –Q.
Indiquer sur un schéma le sens des lignes de champ électrique puis donner l'expression de la capacité C de ce condensateur plan en fonction de S , e et de la permittivité du vide ε_o.

9) Les condensateurs du schéma de principe de l'accéléromètre sont plans et les surfaces en regard ont une même aire S. En utilisant le résultat de la question précédente, exprimer C_1 et C_2 en fonction de d, X, S et ε_o.

III] Mise en forme du signal de mesure

Un montage électronique , que l'on ne précisera pas ici , permet de mesurer la différence de potentiel de la lame L_o mobile.
Cette ddp est notée v_{Lo} et vérifie l'E.D. suivante :

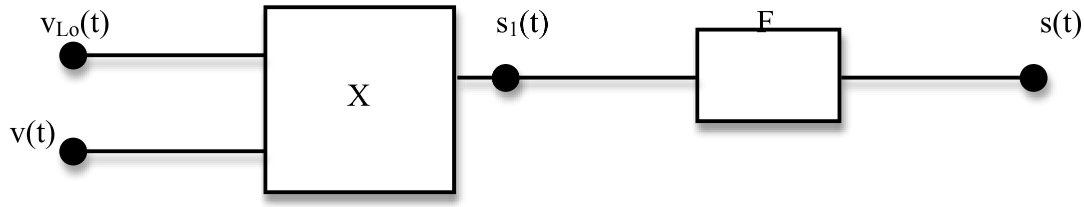
$$\frac{d}{dt}v_{Lo}(t)+\frac{2}{R(C_1+C_2)}v_{Lo}(t)=\frac{V_s}{R(C_1+C_2)}+V_1\frac{w(C_1-C_2)}{(C_1+C_2)}\cos(wt)$$ où R, V_s ,V_1 w sont des constantes positives.

10.1) Définir une constante de temps τ_o pour cette E.D. et réécrire l'E.D. en faisant apparaître cette constante de temps.

On fixe dorénavant τ_o =5ms et w=10^5 rad/s , la mesure de $v_{Lo}(t)$ est faite pour $t \gg \tau_o$.

10.2) Montrer dans ces conditions que $v_{Lo}(t) = aV_s + b\sin(wt)$.
On précisera les expressions de a et b en fonction de V_s , V_1 , C_1 et C_2 puis en fonction de V_s , V_1 X et d.

On considère la chaine électronique ci-dessous correspondant à l'extraction de l'information , c'est à dire à la mesure du déplacement de la lame L_o de la masse d'épreuve puis l'acquisition de l'accélération du boîtier.



X est un multiplieur tel que $s_1(t) = K * v(t) * v_{Lo}(t)$ où v(t)=$\frac{V_s}{2} + V_1 * \sin(wt)$ et K est une constante positive.

F est un filtre dont la fonction de transfert est notée $\underline{H}_F = \frac{\underline{s}}{\underline{s}_1}$

11) Déterminer l'expression de $s_1(t)$ et représenter le spectre de ce signal.
On rappel que $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.

12) La fonction du filtre F doit être telle que l'on veut récupérer à la sortie de ce filtre la valeur moyenne de $s_1(t)$. Proposer un filtre possible en n'utilisant qu'une résistance et une capacité.
Exprimer la fonction de transfert $\underline{H}_F$ du filtre ainsi réalisé et proposer une valeur de R et de C à partir des valeurs usuelles utilisées en T.P.

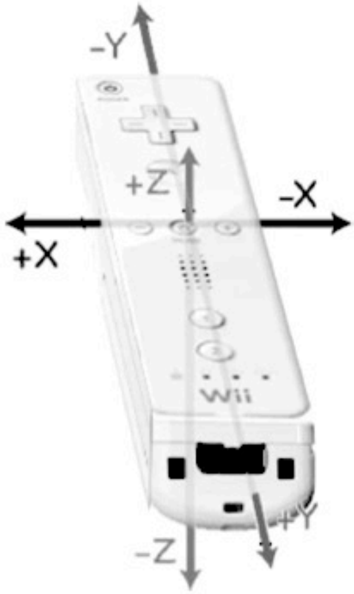
13) Déduire des questions précédentes l'expression de s en fonction de K,V_1,X ,d et V_s et montrer qu'elle s'exprime en fonction de l'accélération a(t) du boîtier .
On mettra s sous la forme : s = V_o + B*a(t).

V_o est appelé tension de « repos » de l'accéléromètre et B la sensibilité.

14) Exprimer V_o et B en fonction des données du problème.
Est ce que ce l'expression de s permet d'avoir accès au signe de l'accélération ?

IV] Application à la Wiimote.

Le capteur utilisé par la Wiimote est un accéléromètre ADXL330 qui fournit trois tensions fidèles aux accélérations sur trois axes perpendiculaires (X,Y,Z) orientés sur la figure ci-dessous.
Les caractéristiques de la Wiimote sont aussi données dans le tableau.



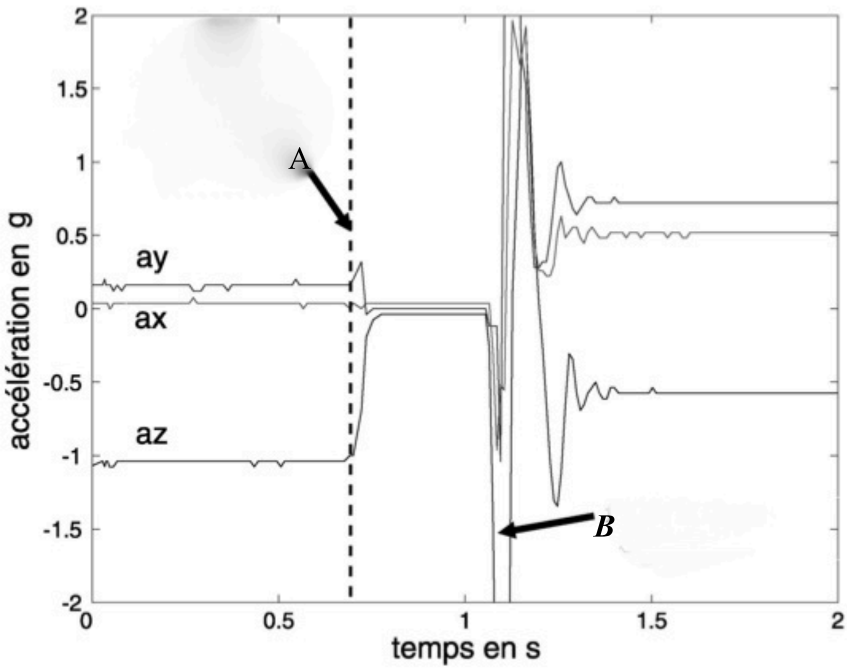
Prix	39,99 €
Poids	138 g
Taille	15 cm
Bande passante	550 Hz en (Z) ; 1600 Hz en (X, Y)
Étendue de mesure	$\pm 3 \times 9{,}81$ (ms^{-2})
Dynamique	8 bits

La tension de « repos » de l'accéléromètre est V_o=2,5V.
La tension de sortie maximale est s = « V_{out} »=5V.

15) Déduire du tableau et des questions précédentes :
La sensibilité B en V/g de l'accéléromètre.
La résolution du capteur

On donne les mesures des accélérations lors de la chute d'une manette de jeu selon la verticale.

16) Expliquer soigneusement le chronogramme ci-dessous sachant qu'à t=0 , la manette est lâchée sans vitesse initiale. Quelle est la hauteur de chute de la console ?



V] Utilisation d'un accéléromètre pour déterminer l'accélération radiale d'un satellite

Un satellite, de masse m_s, de centre d'inertie S, est en orbite circulaire autour de la terre de centre O, sa période est T_o = 12 h. Dans ce satellite un point matériel M de masse m=100g peut se déplacer sans frottements sur un axe Sx, fixe dans le satellite (cf. figure 3). En outre M est soumis à une force élastique qui dérive d'une énergie potentielle $E_p(x)=\frac{1}{2}mw_1^2x^2$ avec w_1 =0,03rad.s et $\overrightarrow{SM}=x\vec{e}_x$.

Rayon de la terre R = 6400 km. On posera $g=\frac{GM_T}{R^2}$ où M_T est la masse de la terre et G , la constante de la gravitation universelle.

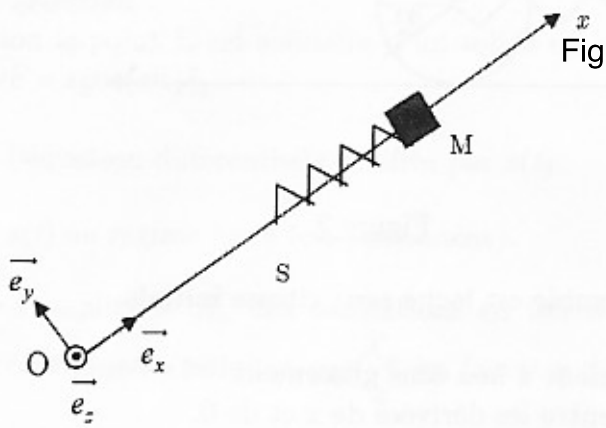


Figure 3

On pose r_o=OS et on désigne par R_S le référentiel lié au satellite muni du repère cartésien (S, $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$).
Le référentiel R_g géocentrique est supposé galiléen.

17)

1-a) Déterminer la vitesse v_o du satellite en fonction de r_o, g et R.

1-b) En déduire l'expression de T_o en fonction de r_o, g et R. Calculer numériquement r_o, v_o et la vitesse angulaire w_o du satellite dans R_g.

18) On étudie le mouvement de M dans le référentiel R_S.

18-a) Déterminer l'équation différentielle du mouvement.

18-b) Donner une équation du mouvement approchée en considérant que $x << r_o$, en ne faisant intervenir que w_o, w_1, x et ses dérivées temporelles.

18-c) Montrer que M oscille et que sa période d'oscillation n'est quasiment pas affectée par la révolution du satellite.

18-d) Pourquoi ce dispositif est-il pertinent pour mesurer, s'il y a lieu, l'accélération radiale du satellite ?

Fin du second problème

FIN