Sujet Mines Ponts 2011
Physique II
Option MP

I Conduction dans un solide semi-conducteur

Note : L'énoncé confond régime permanent et stationnaire. Rappelons que le premier désigne un régime commandé régulier ; ou établi et succède à un régime transitoire, que le second est un régime indépendant du temps. Tous les régimes stationnaires peuvent être considérés comme des régimes permanents mais l'inverse est bien sur erroné.

I A Mesure directe de la conductivité

1) Symétrie cylindrique simplifiée $\boldsymbol{j}(M) = j(r)\boldsymbol{e}_r$

- Considérons un cylindre de hauteur ε de rayon r centré sur l'électrode. La loi des nœuds en régime stationnaire nous permet d'écrire l'invariance de l'intensité sur toutes les surfaces de conduction, soit sur surface cylindrique de rayon r et de hauteur ε :
  $i = \iint \boldsymbol{j}(M)d\boldsymbol{S} = j(r)2\pi r\varepsilon$ $\qquad j(r) = \frac{i}{2\pi r\varepsilon}$
- Dans le semi-conducteur, nous utiliserons l'hypothèse de l'énoncé qui nous permet d'exploiter la loi d'Ohm $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{\gamma E}$:
  $$V(M_1) - V(M_2) = -\int_{M_2}^{M_1} \boldsymbol{E}.d\boldsymbol{l} = -\frac{1}{\gamma}\int_{M_2}^{M_1} \boldsymbol{j}.d\boldsymbol{l} = -\frac{1}{\gamma}\int_{r_2}^{r_1} \frac{i}{2\pi r\varepsilon}.dr = \frac{i}{2\pi\gamma\varepsilon} ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

2)

- *Principe de superposition* : Nous utiliserons la linéarité des équations décrivant le problème. La solution est la somme des solutions correspondantes à une seule électrode en A traversée par le courant i, et une seule électrode en D traversée par le courant –i. Soit :
  $$V(M_1) - V(M_2) = \frac{i}{2\pi\gamma\varepsilon}\left[ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) - ln\left(\frac{r'_2}{r'_1}\right)\right] = \frac{i}{2\pi\gamma\varepsilon}\left[ln\left(\frac{r_2}{r_1}\frac{r'_1}{r'_2}\right)\right]$$
- Sur la médiatrice du segment AD, nous avons r=r', la différence de potentiel sera donc nulle. Le plan médiateur de AD définit une surface équipotentielle.

3)

- En exploitant les hypothèses des questions précédentes, en prenant M_1 à la limite de l'électrode A et M_2 à la limite de l'électrode D, nous avons :
  $$V(M_1) - V(M_2) = \frac{i}{2\pi\gamma\varepsilon}\left[ln\left(\frac{DM_1}{a}\frac{AM_2}{a}\right)\right] \approx \frac{i}{\pi\gamma\varepsilon}\left[ln\left(\frac{\ell}{a}\right)\right]$$
  Nous en déduisons : $\qquad R \approx R_0\left[ln\left(\frac{\ell}{a}\right)\right]$ $\qquad$ avec $R_0 = \frac{1}{\pi\gamma\varepsilon}$

4) Application numérique :

- $R \approx 53.3\, m\Omega$
  La valeur est faible mais loin d'être impossible à mesurer. Bien entendu la méthodologie classique avec Ohmmètre n'est pas la plus adaptée, une méthode de pont sera préférable et un soin certain devra être apporté à la gestion des connexions.

5) Méthode de Van der Pauw :
Méthode mise au point en 1957 par un physicien hollandais pour déterminer la résistance et le coefficient de Hall de n'importe quel échantillon d'épaisseur uniforme.

- Nous avons : $u = V(P) - V(Q) = \frac{i}{2\pi\gamma\varepsilon}\left[ln\left(\frac{DP}{AP}\frac{AQ}{DQ}\right)\right] = \frac{i}{2\pi\gamma\varepsilon}[ln(2)]$
  Soit $\qquad R_{//} = \frac{1}{2\pi\gamma\varepsilon}[ln(2)] = R_0\frac{\ln(2)}{2}$
  Application numérique : $\qquad R_{//} \approx 5.01\, m\Omega$

I B Effet Hall

L'étude dans ce paragraphe est menée en supposant le champ **B** uniforme. Cette hypothèse est en contradiction avec l'existence de **j**, elle n'est conciliable que si le champ induit par les courants est négligeable. C'est une autre perspective associée à l'A.R.Q.S..

Les remarques sont à faire à l'adresse suivante : christophe.caire@prepas.org

6) Modèle de Drude : on considère que les charges subissent une force de frottement fluide.

- Ecrivons le PFD sur une charge : $m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = q\boldsymbol{E} + \boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} - f\boldsymbol{v}$

  En régime stationnaire, l'équation précédente s'écrit : $\frac{q\boldsymbol{E}}{f} = \boldsymbol{v}$

  Soit n la densité de porteurs de charge q, le vecteur densité de courant **j** est donné par la relation : $\boldsymbol{j} = nq\boldsymbol{v} = \frac{nq^2}{f}\boldsymbol{E}$
- Le coefficient est dénommé par l'énoncé lui-même comme γ conductivité du milieu. La question doit sans doute être prise comme une variante de la classique question sur la couleur du cheval blanc d'un roi victime de Ravaillac.

7)

- Reprenons le PFD en introduisant la force magnétique : $m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B}) - f\boldsymbol{v}$
- L'équation n'est plus linéaire, mais nous supposerons, comme l'énoncé nous y autorise, qu'il existe un régime permanent stationnaire. Il vérifie : $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B} - \frac{f}{q}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}\wedge\frac{\boldsymbol{B}}{nq} - \frac{f}{nq^2}\boldsymbol{j}$

  Soit en utilisant les constantes : $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\mathcal{R}}\,\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{B} - \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}$

8)

- Loi de conservation de la charge $\frac{dQ}{dt} = -I$, soit au niveau local $div\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$.

  Nous sommes en régime stationnaire, donc $div\,\boldsymbol{j} = 0$ (loi des nœuds).

  La relation ci-dessus est vrai en tout point à l'exception des zones d'injection de courant A et D qui sont des singularités.

9)

- Nous exploitons la question 7 : $\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{Rot}\left(-\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{\mathcal{R}}} + \frac{1}{\gamma\boldsymbol{\mathcal{R}}}\boldsymbol{j}\right) = \frac{1}{\gamma\boldsymbol{\mathcal{R}}}\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{j})$ car en régime stationnaire nous avons $\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{0}$**.**

  En développant la relation à l'aide du formulaire d'analyse vectoriel, nous obtenons :

  $$\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}.\boldsymbol{Grad})\boldsymbol{j} = \frac{1}{\gamma\boldsymbol{\mathcal{R}}}\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{0}$$

10)

- Nous utiliserons l'équation de Maxwell-Gauss en supposant que le semi-conducteur se comporte comme un matériau linéaire possédant la permittivité électrique du vide.

  $$\rho = \varepsilon_0\,div\,\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\,div\left(-\boldsymbol{\mathcal{R}}\,\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{B} + \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{j}\right) = -\boldsymbol{\mathcal{R}}\varepsilon_0\,div\,(\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{B}) \qquad \text{car } div\,\boldsymbol{j} = 0$$

  or $div(\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{j}) - \boldsymbol{j}\,\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{j}) = 0$

  La plaque reste donc en tout point localement neutre.

11)

- $u = V(P) - V(Q) = \int_P^Q \boldsymbol{E}.d\boldsymbol{l} = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} E_y\,dy$
- Vu la symétrie du plan PQ par rapport aux connexions, et aux lois locales vérifiées par **j**, nous savons que **j** sur le plan PQ peut s'écrire :$\boldsymbol{j}(M) = j(y)\boldsymbol{e}_x$

  Nous en déduisons $\boldsymbol{E} = \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{j} - \boldsymbol{\mathcal{R}}\,\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{B} \Rightarrow E_y(0,y) = \boldsymbol{\mathcal{R}}\,j(y)B$

  En utilisant la question 1 et en supposant que les lignes de courant n'ont pas été modifiée, nous exprimons **j** sur PQ : $j(y) = \frac{i}{2\pi r\varepsilon}2\cos\alpha = \frac{i\ell}{2\pi r^2\varepsilon} = \frac{2i}{\pi\ell\left(1+\left(\frac{2y}{\ell}\right)^2\right)\varepsilon}$

  Soit $u = V(P) - V(Q) = \displaystyle\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{\boldsymbol{\mathcal{R}}B2i}{\pi\ell\varepsilon\left(1+\left(\frac{2y}{\ell}\right)^2\right)}dy = \frac{\boldsymbol{\mathcal{R}}Bi}{2\varepsilon}$

  Nous identifions : $R_\perp = \frac{\boldsymbol{\mathcal{R}}B}{2\varepsilon}$
- Le phénomène de Hall est exploité dans de nombreux contextes, il permet souvent de déterminer soit la valeur de l'intensité soit la valeur du champ B. Ici vu la forme demandée (résistance) on se limitera à la détermination de B.

Fin de la partie I

II Conduction dans un plasma à basse fréquence

II A Courant électrique dans le plasma

13)

- L'approximation $\boldsymbol{Rot}\,\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}$ est la forme réduite de l'équation de Maxwell-Ampère qui s'écrit $\boldsymbol{Rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$. Il nous faut donc supposer que le matériau a les propriétés magnétiques du vide et que son courant de déplacement $\boldsymbol{j}_D = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ est négligeable par rapport à celui de conduction.
- L'approximation qui consiste à négliger le courant de déplacement devant celui de conduction est fréquente et porte parfois le nom d'approximation des régimes quasi-stationnaires (A.R.Q.S). Il est à noter que cette dernière ne se limite pas à la propriété précédente.

II B Vitesses, courant et forces

14)

- Les ions sont d'une masse supérieure ou égale à celle d'un proton $m_p = 1.672\,10^{-27}\,kg$. Cette masse est 1863 fois supérieure à celle de l'électron.
  On pourra, pour cette raison et d'autres, négliger le courant d'ions devant celui d'électrons dans le référentiel barycentrique, évidence déconseillée à ce stade vu la formulation des questions de l'énoncé et l'analyse d'ondes D'Alfven en dernière partie.

15)

- En considérant qu'un ion est formé par ionisation d'une particule neutre, et en associant l'ion à son électron, on peut suivre l'impulsion (quantité de mouvement) du système ion+électron. La vitesse $\boldsymbol{V}$ serait la vitesse du barycentre de ce système.
  $$(m_p + m_e)\boldsymbol{V} = m_p \boldsymbol{v}_p + m_e \boldsymbol{v}_e$$
  Cette explication est toutefois simpliste car v_p et v_e sont des champs de vitesse, on ne peut les associer à un couple ion+électron.
- Nous avons par ailleurs : $$\boldsymbol{j} = n_0 e \boldsymbol{v}_p - n_0 e \boldsymbol{v}_e$$
  Résolvons ce système linéaire : $$\begin{cases} \boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{V} + \frac{m_e}{m_p + m_e}\frac{\boldsymbol{j}}{n_0 e} \approx \boldsymbol{V} + \frac{m_e}{m_p}\frac{\boldsymbol{j}}{n_0 e} \\ \boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{V} - \frac{m_p}{m_p + m_e}\frac{\boldsymbol{j}}{n_0 e} \approx \boldsymbol{V} - \frac{\boldsymbol{j}}{n_0 e} \end{cases}$$
  Aucune information n'étant fournie sur les conditions d'usage du Plasma, nous ne négligerons pas d'autres termes.

16)

- Nous sommons les forces électromagnétiques aux forces dérivées des collisions :
  $$d\boldsymbol{F}_e = (-n_0 e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_e \wedge \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{f}_\nu)d\mathcal{V} = \left[-n_0 e\left(\boldsymbol{E} + \left(\boldsymbol{V} - \frac{\boldsymbol{j}}{n_0 e}\right) \wedge \boldsymbol{B}\right) + \boldsymbol{f}_\nu\right] d\mathcal{V}$$
  Soit : $$d\boldsymbol{F}_e = [-n_0 e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{B} + \boldsymbol{f}_\nu]\, d\mathcal{V}$$

17)

- Une analyse similaire sur les ions nous fournit :
  $$d\boldsymbol{F}_p = \left[n_0 e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{B}) + \frac{m_e}{m_p}\boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{B} - \boldsymbol{f}_\nu\right] d\mathcal{V}$$
  Le signe négatif de la contribution de collision s'explique par le principe des actions réciproques.
- Effectuons la somme des forces s'exerçant sur les ensembles ion et électrons :
  $$d\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{F}_p + d\boldsymbol{F}_e = [\boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{B}]\, d\mathcal{V}$$
- Sommairement, cette force est dite « Force de Laplace ».

II C Modèle collisionnel pour le plasma

Le sujet s'intéresse à la problématique du choc de deux particules. On notera l'habileté du rédacteur pour éviter le terme sachant sans doute qu'il est hors programme de la division concernée.
Dans cette partie les vitesses exploitées ne sont plus des champs vectoriels, mais les vitesses des particules étudiées.

18)

- On écrit la conservation de l'impulsion : $m_p v_p - m_e v_e = -m_p w_p + m_e w_e$.
  On fait de même avec l'énergie qui se confond ici avec l'énergie cinétique au vu des hypothèses : $m_p v_p^2 + m_e v_e^2 = m_p w_p^2 + m_e w_e^2$.
- Nous avons : $\begin{cases} m_p(v_p + w_p) = m_e(v_e + w_e) \\ m_p(v_p^2 - w_e^2) = m_e(w_e^2 - v_e^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_p(v_p + w_p) = m_e\,(v_e + w_e) \\ m_p(v_p - w_p)(v_p + w_p) = m_e(w_e - v_e)(v_e + w_e) \end{cases}$
  donc $v_p - w_p = w_e - v_e \Rightarrow v_p + v_e = w_e + w_p$

19)

- L'expression demandée s'obtient en éliminant w_p du système d'équations.
  Soit :
  $$m_p v_p - m_e v_e = -m_p w_p + m_e w_e = -m_p(v_p + v_e - w_e) + m_e w_e$$
  $$(m_p + m_e) w_e = 2 m_p v_p + (m_p - m_e) v_e$$
  $$(m_p + m_e)(w_e + v_e) = 2 m_p (v_p + v_e)$$
  $$w_e + v_e = \frac{2m_p}{m_p + m_e}(v_p + v_e) = \frac{2}{m_e}\frac{m_e m_p}{m_p + m_e}\,(v_p + v_e)$$
  donc
  $$m_e(\boldsymbol{v}'_e - \boldsymbol{v}_e) = -\alpha\mu\,(\boldsymbol{v}_e - \boldsymbol{v}_p) \qquad \text{où } \alpha = 2$$

20)

- Le PFD associe force et variation d'impulsion. La variation d'impulsion lors du choc est donnée par la formulation précédente. Pour un électron interagissant avec un ion, elle vaut :
  $$\boldsymbol{F}_{ep} = \frac{m_e}{\tau'}(\boldsymbol{v}'_e - \boldsymbol{v}_e) = -\frac{\alpha\mu}{\tau'}\,(\boldsymbol{v}_e - \boldsymbol{v}_p)$$
  où τ' est le temps caractérisant l'interaction ion électron.
  A l'aide de ces éléments il est possible de mettre en place une démarche quantitative pour obtenir une formulation voisine de celle recherchée.
  La question demandait toutefois une démarche qualitative, quelques lignes de « baratin » devraient donc suffire.
  On salue l'anticipation prémonitoire du concours des Mines sur la rénovation des programmes de Physique puisqu'il suffira désormais de « Savoir parler de.. ».

21)

- On reprend l'expression de 16 et on écrit qu'elle est nulle puisque la variation d'impulsion de l'électron est considérée comme nulle.
  $$d\boldsymbol{F}_e = [-n_0 e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{B} + \boldsymbol{f}_v]\,d\mathcal{V} = 0$$
  $$-n_0 e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{B} - \frac{n_0 m_e}{\tau}\,(\boldsymbol{v}_e - \boldsymbol{v}_p) = 0 \qquad \text{avec } \boldsymbol{v}_e - \boldsymbol{v}_p = -\frac{\boldsymbol{j}}{n_0 e}$$
  $$-n_0 e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{B} + \frac{m_e}{\tau e}\,\boldsymbol{j} = 0$$
  $$\boldsymbol{j} = \frac{n_0\tau e^2}{m_e}\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{B} - \frac{1}{n_0 e}\boldsymbol{j}\wedge\boldsymbol{B}\right)$$
  Nous identifions le paramètre $\gamma = \frac{n_0\tau e^2}{m_e}$

II D Ondes magnétohydrodynamiques dans un plasma

22)

- Calculons la divergence du champ B : $div\,\boldsymbol{B} = div\,\boldsymbol{b}(z,t)$
  Le champ b(z,t) est un champ ayant la forme d'une onde plane progressive monochromatique, exploitons la réduction des opérateurs d'analyse vectorielle correspondante : $div\,\boldsymbol{b} = -ik\boldsymbol{e}_z.\boldsymbol{b}$
  La divergence de B étant nulle nous avons $0 = \boldsymbol{e}_z.\boldsymbol{b}_0$
- Nous sommes en basses fréquences : $\boldsymbol{Rot}\,\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Rot}\,\boldsymbol{b} = -ik\boldsymbol{e}_z\wedge\boldsymbol{b} = \mu_0\boldsymbol{j}$
  Soit
  $$\boldsymbol{j} = -\frac{ik}{\mu_0}\boldsymbol{e}_z\wedge\boldsymbol{b}$$

Les remarques sont à faire à l'adresse suivante : christophe.caire@prepas.org

23)

- b_0 constitue un « infiniment petit » par rapport à B_0. A ce titre l'équation fournit par l'énoncé devient au premier ordre : $\rho_m \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} = \boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{B} \simeq \boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{B}_0 = -\frac{ik}{\mu_0}(\boldsymbol{e}_z \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{B}_0$

  En exploitant le caractère TM de b, on obtient : $\rho_m \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} = -\frac{ik}{\mu_0}(\boldsymbol{e}_z \wedge \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{B}_0 = -\frac{ikB_0}{\mu_0}\boldsymbol{b}$

  L'équation obtenue est linéaire au premier ordre, les solutions permanents seront donc aussi plane progressive et monochromatique : $\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} = i\omega \boldsymbol{V} = -\frac{ikB_0}{\mu_0 \rho_m}\boldsymbol{b}$

  Donc $\boldsymbol{V} = -\frac{kB_0}{\omega \mu_0 \rho_m}\boldsymbol{b} = -\frac{kB_0}{\omega \mu_0 n_0 m_p}\boldsymbol{b}$

24)

- Maxwell-Faraday : $\boldsymbol{Rot\, E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ avec $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{B} \simeq -\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{B}_0$ au premier ordre

  $$\boldsymbol{Rot\, E} = -\boldsymbol{Rot\, V} \wedge \boldsymbol{B}_0 = ik\boldsymbol{e}_z \wedge (\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{B}_0) = -\frac{ik^2B_0^2}{\omega \mu_0 n_0 m_p}\boldsymbol{e}_z \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{e}_z) = -\frac{ik^2B_0^2}{\omega \mu_0 n_0 m_p}\boldsymbol{b} = -\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t} = -i\omega \boldsymbol{b}$$

  Soit $\frac{k^2B_0^2}{\omega^2 \mu_0 n_0 m_p} = 1$, nous obtenons $c_A = \frac{\omega}{k} = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 n_0 m_p}} = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_m}}$

- Analyse dimensionnelle : $[c_A^2] = \frac{[B_0^2/\mu_0]}{[\rho_m]} = \frac{[Energie\ Volumique]}{[Masse\ volumique]} = \frac{[Energie]}{[Masse]} = \frac{M.L^2.T^{-2}}{M} = \frac{L^2}{T^2}$

  C_A est donc bien homogène à une vitesse.

25) Application numérique

- AN : $c_A = 3.77\ m/s$.

  Aucun commentaire pertinent à proposer, le « plasma » de mercure liquide ne m'étant pas coutumier.

<u>Fin de la partie II</u>

<u>Fin du corrigé</u>

Les remarques sont à faire à l'adresse suivante : christophe.caire@prepas.org