

Devoir 16 type CCP - Corrigé

PROBLÈME A ÉTUDE D'UN PLASMA EN VUE DE RÉALISER LA FUSION NUCLÉAIRE

A-I Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme et permanent

1-

Cette condition ne peut être fournie qu'en supposant la force magnétique non nulle, donc la vitesse non colinéaire au champ magnétique. On suppose, comme ce sera le cas par la suite, que le mouvement se fait dans le plan orthogonal au champ magnétique.

On souhaite avoir $m \cdot g \ll v \cdot B$ soit $v \gg \frac{m \cdot g}{B}$

2-

Le TPC s'écrit alors $\frac{dE_c}{dt} = [q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}] \cdot \vec{v} = 0$. L'énergie cinétique est donc constante.

3-

On applique le pfd pour la particule, ce qui amène aux équations :

$$\begin{cases} m \cdot \dot{v}_x = \dot{v}_y \cdot B \\ m \cdot \dot{v}_y = -\dot{v}_x \cdot B \\ m \cdot \dot{v}_z = 0 \end{cases}$$

$\dot{v}_z = 0$ implique que $v_z = C^{te} = v_0$ d'après la condition initiale.

$$\text{Or } E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_x^2 + v_y^2 + v_0^2) = C^{te} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2$$

On en déduit que $v_x = v_y = 0 \forall t$. Ce qui amène à $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_0 + v_0 \cdot t \cdot \vec{e}_z$

La trajectoire est rectiligne uniforme.

4-

4-a- On reprend les équations du mouvement : $\dot{v}_x - \omega_0 \cdot v_y = 0, \dot{v}_y + \omega_0 \cdot v_x = 0, \dot{v}_z = 0$

4-b- $\dot{v}_z = 0$ donne $v_z = C^{te}$ or $v_z(t=0) = 0$ donc $\dot{z} = v_z = 0$ ce qui donne $z = C^{te}$

Le mouvement est plan

4-c- $[\dot{v}_x - \omega_0 \cdot v_y] + i \cdot [\dot{v}_y + \omega_0 \cdot v_x] = 0 + i \cdot 0 = 0$, ce qui donne $\dot{v}_x + i \cdot \dot{v}_y + \omega_0 \cdot (-v_y + i \cdot v_x) = 0$, ce que l'on peut écrire sous la forme :

$$\dot{v}_x + i \cdot \dot{v}_y + i \cdot \omega_0 \cdot \left(-\frac{1}{i} \cdot v_y + v_x\right) = \dot{v}_x + i \cdot \dot{v}_y + i \cdot \omega_0 \cdot (i \cdot v_y + v_x) = 0, \text{ soit } \underline{\dot{U} + i \cdot \omega_0 \cdot U = 0}$$

4-d- La solution est de la forme $U = \underline{A} \cdot e^{-i \cdot \omega_0 \cdot t}$ avec $U(t=0) = 0 + i \cdot v_0 = \underline{A}$ donc

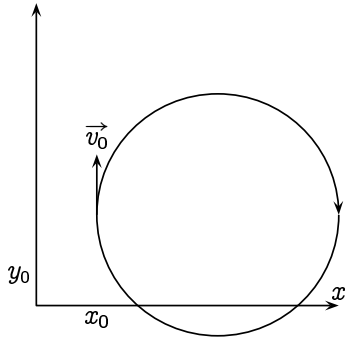
$$\underline{U} = i \cdot v_0 \cdot e^{-i \cdot \omega_0 \cdot t}$$

4-e- Il suffit d'intégrer U : $\underline{M} = x_0 + i \cdot y_0 - \frac{v_0}{\omega_0} \cdot (e^{-i \cdot \omega_0 \cdot t} - 1)$

4-f- $x(t) = \text{Re}(\underline{M})$, ce qui donne la relation proposée avec $\rho_L = \frac{v_0}{\omega_0}$

4-g- $\rho_L^2 \cdot (\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t) = [x(t) - x_0 - \rho_L]^2 + [y(t) - y_0]^2$

Il s'agit bien là de l'équation d'un cercle de rayon ρ_L et de centre $(x_0 + \rho_L, y_0)$



4-h-

4-i- Il s'agit de la combinaison des deux cas précédents. La trajectoire sera une hélice.

A-II Dérives de particules

1-

On applique le pfd pour la particule, ce qui amène aux équations modifiées par rapport à la partie précédente :

$$\begin{cases} m \cdot \dot{v}_x = \dot{v}_y \cdot B - \hbar \cdot v_x \\ m \cdot \dot{v}_y = -\dot{v}_x \cdot B - \hbar \cdot v_y \end{cases}$$

Ce qui donne en combinant ces deux équations $\dot{U} + \left(\frac{\hbar}{m} + i \cdot \omega_0\right) = 0$

2-

La forme générale de la solution est $\underline{U} = \underline{U}_0 \cdot e^{-\left(\frac{\hbar}{m} + i \cdot \omega_0\right) \cdot t}$ donc

$$a_1 = \frac{\hbar}{m}, a_2 = \omega_0 \text{ et } \underline{U}_0 = i \cdot v_0$$

3-

Méthode équivalente à la première partie :

$$\underline{M} = x_0 + i \cdot y_0 - \frac{i \cdot v_0}{\frac{\hbar}{m} + i \cdot \omega_0} \left(e^{-\left(\frac{\hbar}{m} + i \cdot \omega_0\right) \cdot t} - 1 \right)$$

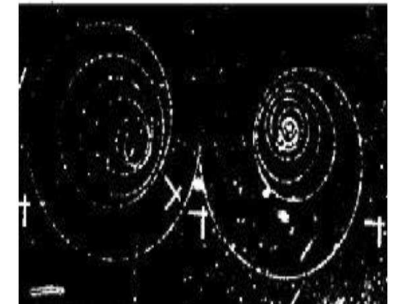
4-

$$\underline{U}_{(\infty)} \rightarrow 0 \text{ et } \underline{M}_{(\infty)} \rightarrow x_0 + i \cdot y_0 + \frac{i \cdot v_0}{\frac{\hbar}{m} + i \cdot \omega_0}$$

5-

En prenant respectivement les parties réelle et imaginaire :

$$x_\infty = x_0 + \frac{v_0 \cdot \omega_0}{\left(\frac{\hbar}{m}\right)^2 + \omega_0^2} \text{ et } y_\infty = y_0 + \frac{v_0 \cdot \frac{\hbar}{m}}{\left(\frac{\hbar}{m}\right)^2 + \omega_0^2}$$



6-

Les deux particules ont même point de départ avec des trajectoires symétriques. Elles ont donc probablement une même masse mais des charges opposées. L'autre particule serait donc un positron

A-III Mesure au sein d'un plasma

1-

D'après l'expression proposée du champ électrique, $div \vec{E} = 0$ donc $\rho = 0 = e \cdot (n_D - n_e)$ donc $n_e = n_D$

2-

$$\vec{j} = e \cdot (n_D \cdot \vec{v}_D - n_e \cdot \vec{v}_e)$$

3-

On négligera la force magnétique devant la force électrique en considérant les particules non relativistes.

Alors en appliquant le PFD à chaque type de particule :

$$\boxed{\frac{d\vec{v}_e}{dt} = \frac{-e}{m_e} \cdot \vec{E} \text{ et } \frac{d\vec{v}_D}{dt} = \frac{e}{m_D} \cdot \vec{E}}$$

4-

Vu les expressions précédentes : $\vec{j} = \left(\frac{e^2}{m_e} + \frac{e^2}{m_D} \right) j \cdot \omega \cdot \vec{E}$

Mais comme $m_D \gg m_e$, $\boxed{\vec{j} \simeq \frac{e^2}{m_e} \cdot j \cdot \omega \cdot \vec{E}}$

5-

Il est nécessaire de revenir ici aux expressions réelles : $\mathcal{P}_v = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{n \cdot e^2 \cdot E_0^2}{\omega \cdot m_e} \cdot \sin(\omega t - k \cdot z) \cos(\omega t - k \cdot z) = \frac{n \cdot e^2 \cdot E_0^2}{2 \cdot \omega \cdot m_e} \cdot \sin\left(\frac{\omega t - k \cdot z}{2}\right)$

Donc $\boxed{\langle \mathcal{P}_v \rangle = 0}$

6-

On recherche grâce aux équations de Maxwell l'équation de propagation. En utilisant la forme proposée pour le champ, on en déduit la relation de dispersion

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0 \cdot \frac{n \cdot e^2}{m_e}$$

Il y aura propagation si le nombre d'onde a une partie réelle non nulle, donc si $k^2 > 0$, ce qui donne

$$\boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{n \cdot e^2}{m_e \cdot \epsilon_0}}}$$

7-

Par définition, $k = N_p \cdot \frac{\omega}{c}$, ce qui donne $\boxed{N_p = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$

8-

On peut imaginer deux cuves de longueur L sur les deux bras d'un Michelson initialement réglé au contact optique. Une cuve contient de l'air alors que l'autre contient le plasma. La différence de marche est alors $\delta = 2 \cdot (n_{air} - N_p) \cdot L$. Avec une source non monochromatique, on pourra facilement retrouver le contact optique en déplaçant le miroir M_1 d'une distance e . On aura alors $e = \pm (n_{air} - N_p) \cdot L$.

Problème B : lunette astronomique

B.1.1)

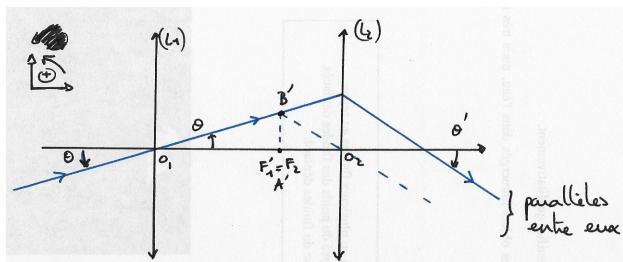
- Un œil normal n'a pas besoin d'accomoder s'il observe un objet situé à l'infini.
- L'image objective doit donc se situer en F_2 . Or l'objet éloigné peut être considéré à l'infini donc cette image objective se trouve en F'_1 . Ainsi $F'_1 = F_2$

• Ce système ne possède pas de foyer image (l'image d'un objet à l'infini est elle-même à l'infini) ni objet (l'objet donnant une image à l'infini est lui-même à l'infini). On parle donc de système afocal.

B.1.2)

• Conditions de Gauss : rayons peu inclinés par rapport à l'axe optique ($\theta \ll 1$) et proches de l'axe optique (par rapport au rayon de la lentille, le rayon doit arriver près du centre, pas près des bords).

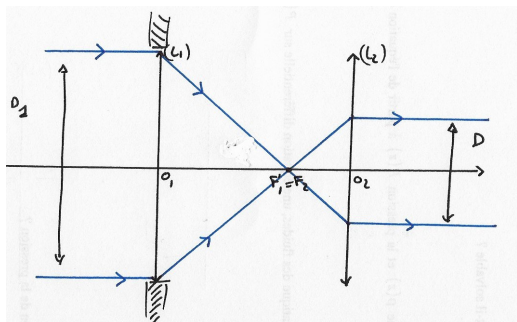
• Construction de l'émergent d'un rayon incident :



• Détermination du grossissement :

- On a : $\tan \theta = \overline{A'B'} / f'_1$ et $\tan \theta' = -\overline{A'B'} / f'_2$
- signes cohérents avec le cas de la figure
- Et : $G = \theta' / \theta \approx \tan \theta' / \tan \theta$ donc
- $G = -f'_1 / f'_2$. AN : $G = -50$.
- $G < 0$ cohérent avec l'inversion du sens de l'image.

B.2) Construction d'un faisceau lumineux :



• Détermination de D

Thalès : $D_1 / D = f'_1 / f'_2$ donc $D = D_1 / |G|$

• Limitation du faisceau émergent :

- Si $D > D_2$, c'est l'oculaire qui limite la taille du faisceau émergent. Sinon, c'est l'objectif.
 - AN : $D = 2 \text{ mm} < D_2$.
- La taille de l'objectif limite le diamètre du faisceau émergent.

B.3) Quand le faisceau lumineux s'incline, il ne vient plus frapper l'oculaire (L_2) de façon centrée. S'il est trop incliné, tout ou partie du faisceau "tape" en dehors de (L_2), sur la monture. Ils ne ressortent pas.

L'oculaire définit donc le diaphragme de champ, c'est-à-dire la zone (le champ) d'espace visible avec la lunette.

B.4) Aberration chromatique : les rayons traversant la lentille sont déviés différemment selon leur longueur d'onde car l'indice optique en dépend (la focale dépend de l'indice $f'(n)$) ; l'image d'un point est donc une tache en lumière polychromatique, les différentes longueurs d'onde la constituant ne convergeant pas au même endroit.

- $n(\lambda)$: milieu dispersif.

Problème C : récupération d'énergie vibratoire

C.1.1) On veut : bonne efficacité (énergie récupérée/énergie disponible). Pour un usage « universel » : spectre plat. Pour un usage sur une machine de fréquence de vibration donnée : résonance à cette fréquence.

C.1.2) Avantage : plus d'énergie potentiellement récupérable. Risque : endommagement.

C.1.3) Qu'attend-on dans cette question ? On donne dans l'énoncé des énergie et pas des puissances.

- Batterie de portable $\approx 10 \text{ kJ}$ (estimation par puissance et temps en veille ; ou par l'énergie massique d'une batterie Li-ion) \rightarrow qu'en faire ?
- Autre point de vue : smartphone se charge en continu et ici on produit de l'alternatif \rightarrow nécessité d'un redresseur.

C.1.4)

• Relation accélération /déplacement : $\vec{a} = d^2 \vec{OM} / dt^2$

En ordre de grandeur : $a \sim (2\pi f)^2 d$ où $f = 200 \text{ Hz}$ et $d = 5 \text{ m.s}^{-2}$, donne bien $d \sim 3 \mu\text{m}$

• Aspect énergétique : $E_{max} = \frac{1}{2} m v^2 \sim \frac{1}{2} m \left(\frac{a}{2\pi f} \right)^2$ AN : $E_{max} \sim 10 \text{ nJ}$

C.2.1) Bilan des forces {masse M} :

poils $\vec{P} = -mg \vec{e}_z$; amortissement $\vec{F} = \vec{0}$; rappel du ressort $\vec{T} = k(l_{eq} - l_0) \vec{e}_z$

• PFD {masse M} dans référentiel galiléen (pas de vibrations) :

$m a_{M/R_s} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{T}$. Or $a_{M/R_s} = 0$. Après projection sur \vec{e}_z , il vient : $l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$

C.2.2) PFD {masse M} dans référentiel non galiléen (vibrations) :

$m a_{M/R_s} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{T} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$ où $\vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_e = -m z''_{vib} \vec{e}_z$ et $\vec{f}_{ic} = \vec{0}$ car (R_s) est en translation par rapport à un référentiel galiléen

• Projection sur \vec{e}_z : $m \ddot{z} = -mg - \lambda \dot{z} + k(l - l_0) - m z''_{vib}$. Avec $l = l_{eq} - z$ et sans oublier $l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$, on

obtient après calculs et en mettant sous forme canonique : $\ddot{z} + \frac{\lambda}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = -z''_{vib}$.

C.2.3) On passe en complexes : $(j\omega)^2 Z + \frac{\lambda}{m} (j\omega) Z + \frac{k}{m} Z = -(j\omega)^2 Z_{vib}$ soit $H = \frac{\frac{\omega^2}{k/m}}{1 + j\omega \frac{\lambda}{k} - \frac{\omega^2}{k/m}}$

• Type de filtre : à BF : $H \sim \frac{\omega^2}{k/m} \rightarrow 0$; à HF : $H \sim \frac{\omega^2}{k/m} \sim -1 \neq 0$. Ainsi : Passe-haut du 2^{ème} ordre

C.2.4) Par identification avec la forme canonique proposée : $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Et $Q \omega_0 = k/\lambda$ soit $Q = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}$.

C.2.5) Amplification de l'amplitude des vibrations. L'énoncé oublie que la fréquence de résonance est légèrement supérieure à ω_0 (effet rapidement négligeable quand Q atteint qq unités).

C.3.1.a) Théorème de Gauss : cf cours

• Application du théorème de Gauss (cf cours) : $\vec{E}_+ = -\vec{E}_- = \sigma / 2 \epsilon_0 \vec{e}_z$

C.3.1.b) Somme des contributions de chaque plan : (cf cours) $\vec{E}_{z < 0} = \vec{E}_{z > e} = \vec{0}$ et $\vec{E} = -\sigma / \epsilon_0 \vec{e}_z$

C.3.1.c) (cf cours) : $C = \epsilon_0 S / e$ et $W_e = \frac{1}{2} C U^2$

C.3.2) $C_{min} = \epsilon_0 S / (d + Z)$ et $C_{max} = \epsilon_0 S / (d - Z)$

C.3.3a) $w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ Sans lien avec la suite. Utilité ?

C.3.3.b) Quand la capacité est chargée à $q = C_{max} U$: $W_e(t = t_0) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_{max}}$

Juste après le déplacement de l'armature : $W_e(t = t_1) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_{min}}$ (fonctionnement à charge constante)

L'énergie maximum récupérable est donc (cas où il n'y a pas de dissipation) :

$$W = W_e(t = t_1) - W_e(t = t_0) = \frac{1}{2} U^2 \frac{C_{max}}{C_{min}} (C_{max} - C_{min})$$

C.4) La bobine fixée à la poutre est mobile, dans le champ magnétique créé par l'aimant permanent \rightarrow phénomène d'induction. Il apparaît donc à ses bornes une fem induite (loi de Faraday). On transforme ainsi l'énergie mécanique des vibrations en énergie électrique.