

# Devoir 14 type Mines - Corrigé

## CORRIGE DU PROBLEME A : SEMI-CONDUCTEURS ET JONCTION PN

<b>A.1</b> $\underbrace{\vec{f}}_{\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}} = -\frac{\overbrace{m}^{\text{kg}}}{\underbrace{\tau}_{\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}} \underbrace{\vec{v}}_{\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$ donc la constante $\tau$ est en seconde.	
<b>A.2</b> Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron dans le référentiel du matériau supposé galiléen conduit à $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$ . En régime permanent, la vitesse ne dépend plus du temps et donc	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math>\vec{v}_{\text{lim}} = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}</math> </div>
<b>A.3</b> Vecteur densité de courant : $\vec{j}_{el} = -en_e \vec{v}_{\text{lim}} = \frac{e^2 \tau n_e}{m} \vec{E}$	
D'après l'expression de la loi d'Ohm locale $\vec{j}_{el} = \sigma \vec{E}$ , il vient	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math>\sigma = \frac{e^2 \tau n_e}{m}</math> </div>
<b>A.4</b> $n_e = \frac{d \rho_{eau}}{M_{Cu}} N_A$	
A.N : $n_e = \frac{d \rho_{eau}}{M_{Cu}} N_A = \frac{8,9 \cdot 1000 \cdot (6,02) 10^{23}}{63,5 \cdot 10^{-3}} = 8,4 \cdot 10^{28}$	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math>n_e = 8,4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} = 8,4 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}</math> </div>
C'est plus de 8000 fois celle du silicium ! Le cuivre est bien plus conducteur que le silicium, qui est un semi-conducteur.	
<b>A.5</b> $R = \rho \frac{\ell}{S}$	
<b>A.6</b> On trace $\ln \rho$ en fonction de $\frac{1}{T}$ et on doit obtenir une droite de pente $B$ et d'ordonnée à l'origine $\ln A$ .	
Par régression linéaire ou représentation graphique on trouve $B \approx 110 \text{ K}$ et $A \approx 2,5 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$	
<b>A.7</b> A 300K, la résistivité du silicium vaut, d'après la relation vue à la question précédente,	
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math>\rho(300\text{K}) \approx 4 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}</math> </div>	
<u>Le silicium est 300 fois plus résistif que le cuivre à 300K !</u>	
<b>A.8</b> Pour un métal : si T augmente, l'agitation des atomes du réseau cristallin augmente et les « frottements » augmentent donc la résistivité augmente.	
Dans le cas du silicium, d'après la relation de la question <b>A.6</b> , on remarque que si T augmente, $\rho$ diminue !	
<b>A.9</b> On a $\sigma = \frac{e^2 \tau n_e}{m}$ donc $n_e = \frac{m}{e^2 \tau} \sigma = \frac{m}{e^2 \tau} \frac{1}{\rho} = \underbrace{\frac{m}{e^2 \tau A}}_{n_e^0} \cdot e^{\frac{B}{T}} = n_e^0 \cdot e^{-\frac{\mathcal{E}}{k_B T}}$	
avec $\mathcal{E} = k_B \cdot B = 9,45 \text{ meV}$	
<b>A.10</b> Un trou possède une charge $+e$	
<b>A.11</b> Si : 4 él de valence    P : 5 él de valence    B : 3 él de valence	
ion $\text{P}^+$ ion $\text{B}^-$	
<b>A.12</b> Dopage au phosphore : densité électronique $n_e$ augmente (dopage N)	
Traduisons la neutralité électrique de l'ensemble : $p + N_p = n$	
Or on a $n \cdot p = n_i^2$ d'où $n = N_p$	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math>n = \frac{n_i^2}{p} = N_p</math> </div>
<b>A.13</b> Par analogie : $n \approx \frac{n_i^2}{N_B}$	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math>p = \frac{n_i^2}{n} = N_B</math> </div>

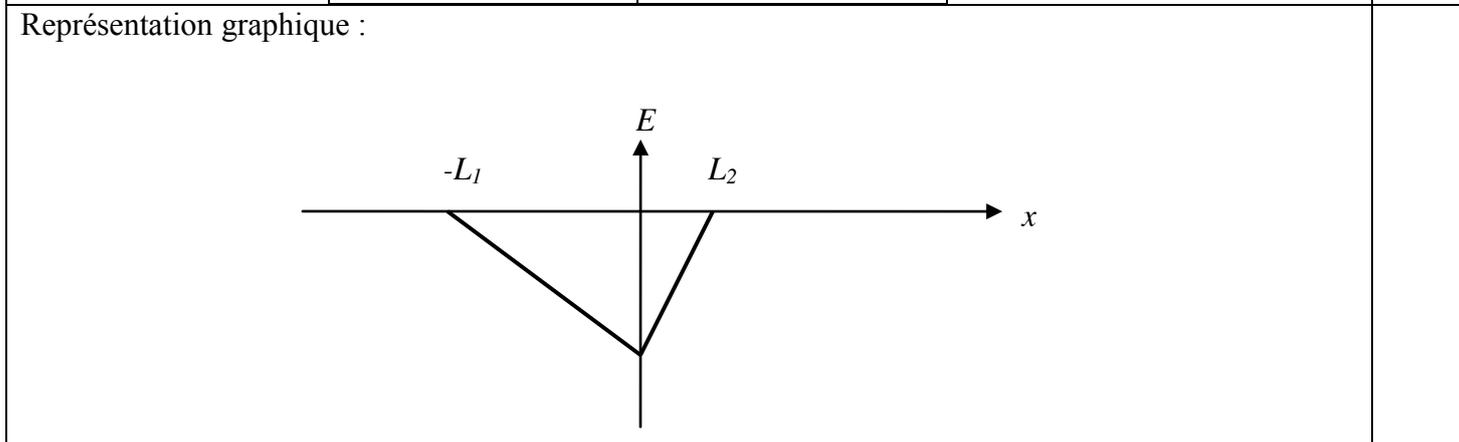
*Tournez la page SVP*

<b>A.14</b> L'ensemble est neutre donc :	$\rho_1 L_1 + \rho_2 L_2 = 0$	
--	-------------------------------	--

<b>A.15</b> Maxwell-Gauss :	$div \vec{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon} \Rightarrow \frac{dE}{dx} = \frac{\rho_c}{\epsilon}$	
-----------------------------	---	--

En intégrant dans les différentes zones et en écrivant la continuité de  $E$  (pas de charges surfaciques), on arrive à :

$x < -L_1$	$0 > x > -L_1$	$0 < x < L_2$	$x > L_2$
$E = 0$	$E = \frac{\rho_1}{\epsilon}(x + L_1)$	$E = \frac{\rho_2}{\epsilon}(x - L_2)$	$E = 0$

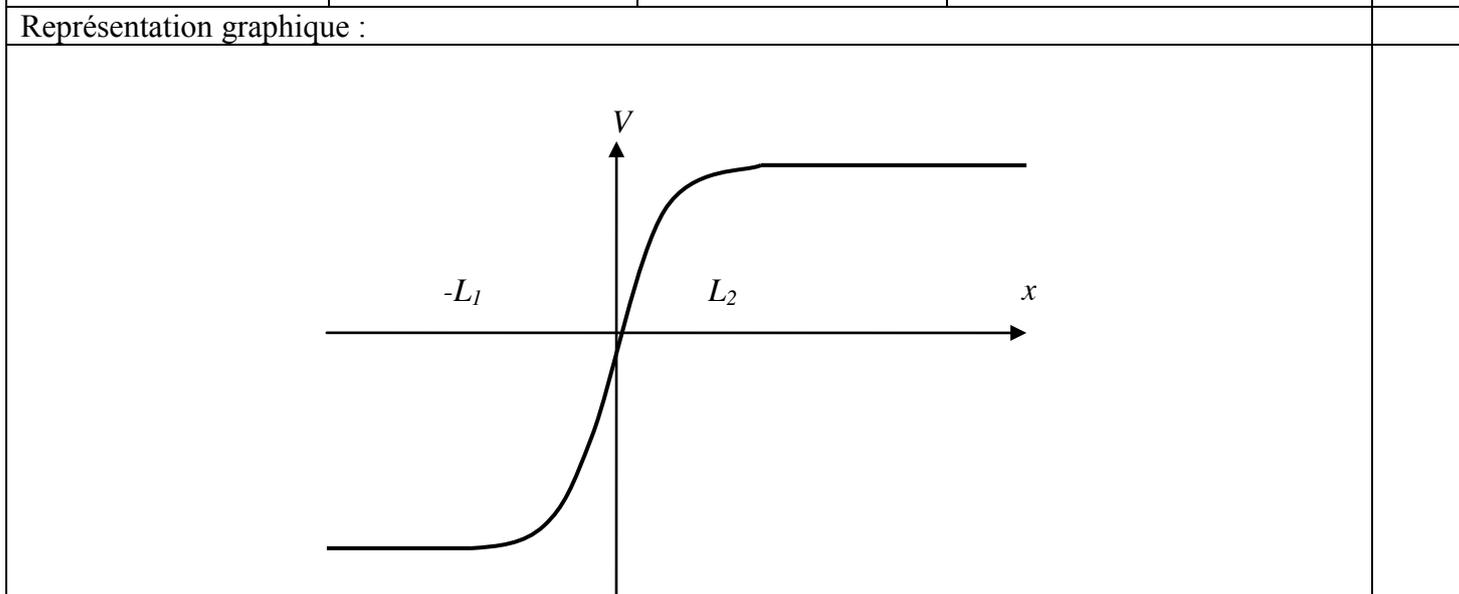


**A.16** On a  $\vec{E} = E(x)\vec{e}_x = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{dV}{dx}\vec{e}_x$ .

On choisit  $V(x=0) = 0$

En intégrant dans les différentes zones et en écrivant la continuité du potentiel  $V$ , on arrive à :

$x < -L_1$	$0 > x > -L_1$	$0 < x < L_2$	$x > L_2$
$V = \frac{\rho_1}{2\epsilon} L_1^2$	$V = -\frac{\rho_1}{\epsilon} \left( \frac{x^2}{2} + L_1 x \right)$	$V = -\frac{\rho_2}{\epsilon} \left( \frac{x^2}{2} - L_2 x \right)$	$V = \frac{\rho_2}{2\epsilon} L_2^2$



<b>A.17</b>	$V_0 = \frac{\rho_2 L_2^2}{2\epsilon} - \frac{\rho_1 L_1^2}{2\epsilon}$	
-------------	---	--

**A.18** On a immédiatement :  $\rho_1 = -eN_1$  et  $\rho_2 = eN_2$

Or  $\rho_1 L_1 + \rho_2 L_2 = 0$  soit  $N_2 L_2 = N_1 L_1$ .

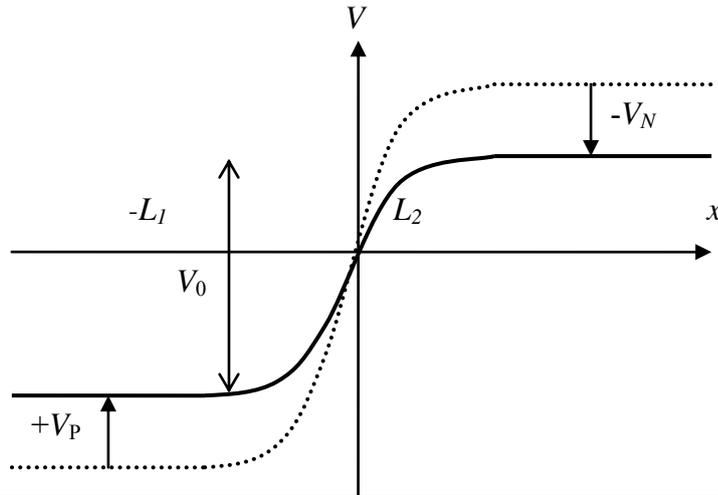
Si  $N_1 \gg N_2$  alors  $L_1 \ll L_2$

La largeur de la ZCE est  $\delta = L_1 + L_2 \approx L_2$

*Tournez la page SVP*

<b>A.19</b> On a		
$V_0 = \frac{\rho_2 L_2^2}{2\varepsilon} - \frac{\rho_1 L_1^2}{2\varepsilon} = \frac{\rho_2 L_2 L_2 - \overbrace{\rho_1 L_1 L_1}^{=\rho_2 L_2}}{2\varepsilon} = \rho_2 L_2 \frac{L_2 + L_1}{2\varepsilon} \approx \rho_2 \frac{L_2^2}{2\varepsilon} = e N_2 \frac{\delta^2}{2\varepsilon}$		
d'où	$\delta = \sqrt{2 \frac{\varepsilon V_0}{e N_2}}$	Application numérique : $\delta = \sqrt{2 \frac{(1,4 \cdot 10^{-10}) 0,3}{(1,6 \cdot 10^{-19}) 1,6 \cdot 10^{21}}} = 0,57 \mu\text{m}$
<b>A.20</b> Loi de Fick :		$\vec{j}_{diff} = -D_n \frac{dn}{dx} \vec{e}_x$
<b>A.21</b> Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron dans le référentiel du matériau supposé galiléen conduit à $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{m}{\tau} \vec{v}$ . En régime permanent, la vitesse ne dépend plus du temps et donc		
	$\vec{v}_{lim} = \frac{\tau}{m} \vec{F}$	
<b>A.22</b> Force de pression s'exerçant sur la surface gauche d'abscisse $x$ : $P(x)S\vec{e}_x$		
Force de pression s'exerçant sur la surface droite ( $x + dx$ ) : $-P(x + dx)S\vec{e}_x$		
Force de pression totale : $(P(x) - P(x + dx))S\vec{e}_x = -\frac{dP}{dx} S\vec{e}_x = \vec{F}$		
<b>A.23</b> Loi des gaz parfaits : $PV = nRT$ donc		$P = \frac{n(x)}{N_a} RT = n(x)k_B T$
<b>A.24</b> La force de pression calculée en <b>A.22</b> s'applique sur tous les électrons de la tranche. Il y a $n(x)Sdx$ électrons dans cette tranche, donc la force s'appliquant sur un seul électron vaut :		
$\vec{F}_{1\text{électron}} = -\frac{k_B T}{n} \frac{dn}{dx} \vec{e}_x$		
La vitesse limite est alors :	$\vec{v}_{lim} = -\frac{\tau}{m} \frac{k_B T}{n} \frac{dn}{dx} \vec{e}_x$	
Le vecteur densité de courants de particules est donc : $\vec{j}_{partic} = n(x)\vec{v}_{lim} = -\frac{\tau}{m} k_B T \frac{dn}{dx} \vec{e}_x$ . On retrouve donc la loi de Fick avec		
	$D_n = \frac{\tau}{m} k_B T$	
<b>A.25</b>	$\vec{j}_{tot} = \vec{j}_{el} + \vec{j}_{diff} = \sigma \vec{E} - D_n \frac{dn}{dx} \vec{e}_x = \frac{n(x)e^2 \tau}{m} \vec{E} - D_n \frac{dn}{dx} \vec{e}_x$	
Le champ électrique est dirigé dans le sens des potentiels décroissants donc des charges positives vers les charges négatives.		
<b>A.26</b> A l'équilibre le courant électronique s'annule. Il vient donc :		$eD_n \frac{dn}{dx} = \frac{ne^2 \tau}{m} E$
Soit :	$\frac{dn}{n} = \frac{e\tau}{mD_n} E dx$ et donc $\frac{mD_n}{e\tau} \ln\left(\frac{n(L_2)}{n(-L_1)}\right) = \int_{L_2}^{-L_1} -E dx$	
<b>A.27</b> On a $n(L_2) = N_2$ et $n(-L_1) = \frac{n_i^2}{N_1}$ , alors :	$\int_{L_2}^{-L_1} -E dx = \frac{mD_n}{e\tau} \ln\left(\frac{N_2 \cdot N_1}{n_i^2}\right)$	
<b>A.28</b> On a d'une part $V(L_2) - V(-L_1) = \int_{L_2}^{-L_1} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{L_2}^{-L_1} -E dx$		
	Donc : $V(L_2) - V(-L_1) = \frac{k_B T}{e} \ln\left(\frac{N_2 \cdot N_1}{n_i^2}\right)$	

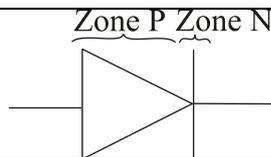
**A.29** Si on applique une d.d.p.  $U$  positive entre la zone P et la zone N, l'allure du potentiel dans la jonction devient :



On a donc abaissé le potentiel de diffusion : des électrons vont passer de la zone N vers la zone P.

Lorsque la d.d.p.  $U$  négative, on augmente le potentiel  $V_0$  : le courant va passer très difficilement.

**A.30** La caractéristique fournie par l'énoncé est tracée en convention récepteur. De plus le sens du courant  $I$  correspond au sens de déplacement des charges négatives (les électrons). D'après la question précédente, on a donc :



## Problème B - Interactions microscopiques

### I. Etude microscopique:

#### I.A. La vapeur d'eau :

I.A.1. La loi des gaz parfaits s'écrit :

$$P.V = n.RT$$

On en déduit :

$$n_v = P.N_A/RT = P/k_B.T = 1,94.10^{25} \text{ molécules.m}^{-3}.$$

La distance moyenne est donc :

$$d_v = \frac{1}{\sqrt[3]{n_v}} = 3,72 \text{ nm}$$

Cette valeur est confirmée à la question 8.

2. Les interactions intermoléculaires sont négligées dans un gaz parfait.

A pression constante, l'équation des gaz parfaits montre que le volume molaire décroît linéairement avec la température lorsqu'on le refroidit.

### B. Un modèle atomique simple :

3. Par symétrie et invariances :

$$\vec{E} = E(r). \vec{u}_r$$

Le théorème de Gauss appliqué sur une sphère de rayon  $r = \|\vec{PN}\|$  fournit :

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \text{ avec } \rho = \frac{3e}{4\pi a^3}$$

On en déduit finalement :

$$\vec{E}_+(N) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a^3} \cdot \vec{r}$$

4. On néglige le poids de l'électron devant la force exercée par le noyau.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron s'écrit alors :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \cdot \vec{r}$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de fréquence propre :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m a^3}}$$

On calcule :

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0} = 2\pi c \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 m a^3}{e^2}} = 4,19.10^{-8} \text{ m} = 41,9 \text{ nm}$$

Ce rayonnement est dans l'UV.

## C. Notion de polarisabilité :

5. A l'équilibre de l'électron, on a :

$$\vec{E}_+(N) + \vec{E}_0 = \vec{0}$$

On en déduit :

$$\vec{r}_{eq} = -\frac{4\pi\epsilon_0 a^3}{e} \vec{E}_0$$

$$\vec{p} = -e\vec{r}_{eq} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \vec{E}_0$$

La polarisabilité est :

$$\alpha = 4\pi a^3 = 3V$$

6. Bien que le nuage concerné par la question précédente ne soit pas le nuage électronique, le volume  $V$  est de l'ordre de grandeur du volume de l'atome.

On peut ainsi penser que la polarisabilité croît avec le volume de l'atome, qui décroît avec  $Z$  dans une période. Ainsi le néon sera moins polarisable que le lithium.

Concernant les molécules diatomiques, la polarisabilité croît également avec le volume des atomes qui la constituent, ainsi le diiode est plus polarisable que le difluor.

## II. Interactions intermoléculaires :

### II. A. Interaction entre deux molécules polaires :

7. Le module du champ  $\vec{E}_{1,0,2}$  est :

$$\|\vec{E}_{1,0,2}\| = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 d^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\theta_1}$$

Il est maximal pour  $\theta_1 = 0$  ou  $\theta_1 = \pi$ .

La valeur minimale de  $e_{p,i}$  s'obtient pour  $\theta_1 = 0$  et  $\theta_2 = \pi$  et vaut  $e_{\min} = \frac{-2p^2}{4\pi\epsilon_0 d^3}$ .



La valeur maximale de  $e_{p,i}$  s'obtient pour  $\theta_1 = 0$  et  $\theta_2 = 0$  et vaut  $e_{\max} = \frac{2p^2}{4\pi\epsilon_0 d^3}$ .



On en déduit :

$$\Delta e = \frac{p^2}{\pi\epsilon_0 d^3}$$

8.  $e_{\max} = -e_{\min} = 1,37 \cdot 10^{-23} \text{ J}$  ;  $\Delta e = 2,73 \cdot 10^{-23} \text{ J}$  ;  $e_{th} = 5,15 \cdot 10^{-21} \text{ J}$  .

On constate que :

$$e_{th} \gg \Delta e$$

Les deux configurations sont donc facilement accessibles.

9. Pour le système à deux états :

$$P(e_{\min}) + P(e_{\max}) = 1.$$

On en déduit :

$$A = \frac{1}{\exp\left(-\frac{e_{min}}{kT}\right) + \exp\left(-\frac{e_{max}}{kT}\right)} = \frac{1}{2 \cdot \text{ch}\left(\frac{e_{max}}{kT}\right)}$$

On a alors :

$$e_1 = P(e_{min}) \cdot e_{min} + P(e_{max}) \cdot e_{max}$$

$$e_1 = \frac{1}{2 \cdot \text{ch}\left(\frac{e_{max}}{kT}\right)} \cdot \left[ \exp\left(-\frac{e_{min}}{kT}\right) \cdot e_{min} + \exp\left(-\frac{e_{max}}{kT}\right) \cdot e_{max} \right]$$

$$e_1 = \frac{1}{2 \cdot \text{ch}\left(\frac{e_{max}}{kT}\right)} \cdot \left[ -\exp\left(\frac{e_{max}}{kT}\right) \cdot e_{max} + \exp\left(-\frac{e_{max}}{kT}\right) \cdot e_{max} \right]$$

$$e_1 = -e_{max} \cdot \text{th}\left(\frac{e_{max}}{kT}\right) \simeq -\frac{e_{max}^2}{kT} = -3,65 \cdot 10^{-26} \text{ J}$$

## II.B. Interaction entre une molécule polaire et une molécule polarisable :

10. On a :

$$\vec{E}_{1,02} = \frac{2p_1}{4\pi\epsilon_0 d^3} \cdot \vec{u}$$

d'où :

$$e_2 = -\frac{1}{2} \alpha \epsilon_0 \left( \frac{2p_1}{4\pi\epsilon_0 d^3} \right)^2 = 3,43 \cdot 10^{-28} \text{ J}$$

## II.B. Interaction entre molécules non polaires :

11. La théorie physique en question est la théorie quantique, car le résultat fait intervenir la constante de Planck  $h$ .

On calcule numériquement :  $e_3 = -2,91 \cdot 10^{-26} \text{ J}$ ,

Rq : la fréquence  $f_0$  donnée ne correspond pas à celle calculée en question 4.

## II.D. Synthèse :

12. On peut remarquer que  $e_2 \ll e_1, e_3$ .

L'énergie totale d'interaction s'écrit, dans l'approximation  $kT \gg e_{max}$  et en négligeant  $e_2$  devant  $e_1$  et  $e_3$ :

$$e = e_1 + e_2 + e_3 \simeq e_1 + e_3 = -\frac{1}{kT} \left( \frac{2p^2}{4\pi\epsilon_0 d^3} \right)^2 - \frac{\alpha^2 h f_0}{2d^6}$$

La force d'interaction est donc :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(e) = -\left[ \frac{1}{kT} \left( \frac{2p^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 + \frac{\alpha^2 h f_0}{2} \right] \frac{6}{d^7} \vec{u}$$

où  $\vec{u}$  est dirigé de  $O_1$  vers  $O_2$  et  $\vec{F}$  est la force exercée sur le dipôle situé en  $M_2$ .

On a alors :

$$C = \frac{hf_0}{2}; D = \frac{1}{k} \left( \frac{2p^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2$$

Pour des molécules non polaires, D est nul.

Cette force est la force de Van der Waals.

## II.E. Conséquence pour un gaz réel :

13. La densité de molécules moyenne est  $n_v = N/V$ .

Les molécules sont non polaires donc  $D = 0$ .

Le nombre  $dN$  de molécules contenu dans une couche d'épaisseur  $dr$  est donc :

$$dN = n_v \cdot 4\pi r^2 \cdot dr$$

L'énergie potentielle d'interaction entre M et les  $dN$  molécules est :

$$dE_{p,i} = dN \cdot e = -\frac{N}{V} 4\pi r^2 [C \cdot \alpha^2] \frac{dr}{r^6}$$

$$\Leftrightarrow dE_{p,i} = -\frac{N}{V} 4\pi [C \cdot \alpha^2] \frac{dr}{r^4}$$

$$\Rightarrow E_{p,i} = \int_{2a}^{\infty} -\frac{N}{V} 4\pi [C \cdot \alpha^2] \frac{dr}{r^4}$$

$$\Leftrightarrow E_{p,i} = -\frac{N}{V} 4\pi [C \cdot \alpha^2] \frac{1}{3(2a)^3}$$

14. L'énergie interne est donc pour  $N$  molécules équivalentes :

$$U(T, V) = N(e_c(T) + \frac{1}{2} E_{p,i})$$

Le facteur  $\frac{1}{2}$  provient du fait qu'en sommant sur toutes les molécules, on compte chaque couple de molécules deux fois. On obtient finalement comme prévu :

$$U(T, V) = N \left[ e_c(T) - \frac{N\pi C \cdot \alpha^2}{V \cdot 12 \cdot a^3} \right]$$

Le nombre de moles est lié au nombre de molécules par :

$$N = n \cdot N_A$$

Pour un gaz monoatomique :

$$e_c(T) = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T$$

On en déduit :

$$U(T, V) = \frac{3}{2} n \cdot R \cdot T - n^2 \cdot \frac{N_A^2 \pi C \cdot \alpha^2}{V \cdot 12 \cdot a^3}$$

Soit :

$$\chi = \frac{3}{2} \cdot R ; \xi = \frac{N_A^2 \pi C \cdot \alpha^2}{12 \cdot a^3}$$

$\chi$  s'identifie à la capacité thermique molaire à volume constant.

Cette relation reste valable pour des molécules polyatomiques non polaires,  $\chi$  prenant alors une valeur différente.