

CORRECTION CCP TSI PHYSIQUE 2012

Anne-Marie Beninger (TSI Marseille) ; Anne Gaulier (TSI Montbéliard)

PREMIER PROBLEME : SOUS-MARINS

Première partie : immersion du sous-marin

1/ Relation entre pression et profondeur de l'eau de mer

1.1 Forces s'exerçant sur ce volume élémentaire : Poids \overrightarrow{dP} , Forces de pression \overrightarrow{dF}

Equilibre : on a dans ce référentiel galiléen $\overrightarrow{dP} + \overrightarrow{dF} = \vec{0}$. En projetant :

sur Ox : $P(x, y, z) dy dz - P(x+dx, y, z) dy dz = 0$ donc **P ne dépend pas de x.**

sur Oy : $P(x, y, z) dx dz - P(x, y+dy, z) dx dz = 0$ donc **P ne dépend pas de y.**

La résultante des forces devient : $(-\rho dx dy dz g + P(z) dx dy - P(z+dz) dx dy) \vec{e}_z$

A l'équilibre : $-\rho dx dy dz g + P(z) dx dy - P(z+dz) dx dy = 0$

Or $P(z+dz) - P(z) = (dP/dz) dz$ d'où $(dP/dz) = -\rho g$

Rmq : Sur le schéma le trièdre Oxyz n'est pas direct. C'est sans incidence sur la suite....

1.2 En intégrant la relation fondamentale de la statique entre $z = 0$ et z :

$P(z) - P(0) = -\rho g (z - 0)$ car ρ est constant Soit **$P(z) = P_0 - \rho g z$**

A.N. $P_{300} = P(-300) = 31,3 \cdot 10^5$ Pa

2/ Utilisation des ballasts

2.1 Le sous-marin est soumis à son poids et à la poussée d'Archimède de l'eau.

Il est en équilibre donc $Mg = \rho_0 V_{\text{imm}} g$ soit **$M = \rho_0 V_{\text{imm}}$**

2.2 $V = L \pi R^2$ d'où $V_{\text{imm}} / V = M / (\rho_0 L \pi R^2) = 0,871$.

Le sous-marin est pratiquement entièrement immergé.

2.3 En remplaçant l'air des ballasts par de l'eau, le poids de l'ensemble augmente et le sous-marin va s'enfoncer dans l'eau.

2.4 Le sous-marin est en équilibre donc $(M + \rho_0 V_b) g = \rho_0 V g$ d'où **$V_b = V - M/\rho_0$**

A.N. $V_b = 2,0 \cdot 10^3$ m³

2.5 La coque extérieure correspond à la séparation eau de mer / eau de mer à la même pression donc peut être plus mince et légère. Par contre la coque intérieure sépare l'eau de mer qui peut être à forte pression (car à grande profondeur) de l'intérieur qui est à la pression de 1 bar donc elle doit être très épaisse et résistante.

Deuxième partie : propulsion du sous-marin

3/ Propulsion nucléaire

3.1.1 . Le système Σ_f est fermé, donc sa masse est constante : $M(t) = M(t+dt)$

La masse est une grandeur extensive, soit $M(t) = dm_e + M_C(t) = dm_s + M_C(t+dt)$

De plus l'écoulement est permanent donc $M_C(t) = M_C(t+dt)$ donc **$dm_e = dm_s = dm$**

3.1.2 On applique le premier principe au système fermé Σ_f entre t et $t+dt$

$dE = E(t+dt) - E(t) = \delta W + \delta Q$

L'énergie est une grandeur extensive $E(t+dt) - E(t) = [dm_s e_s + E_C(t+dt)] - [dm_e e_e - E_C(t)] = dm (e_s - e_e)$

L'écoulement est permanent donc $E_C(t) = E_C(t+dt)$

$\delta W = P_e v_e dm_e - P_s v_s dm_s + dm w_i$

$\delta Q = dm q$

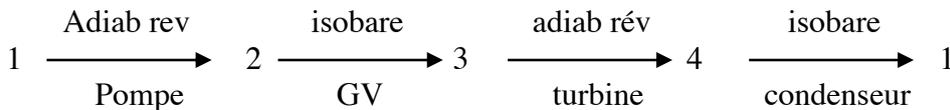
On en déduit $dm (e_s - e_e) = P_e v_e dm - P_s v_s dm + dm w_i + dm q$

De plus $e = u + e_c + e_p$ et $h = u + Pv$

On en déduit $(h_s + e_{cs} + e_{ps}) - (h_e + e_{ce} + e_{pe}) = w_i + q$ **Soit $\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = w_i + q$**

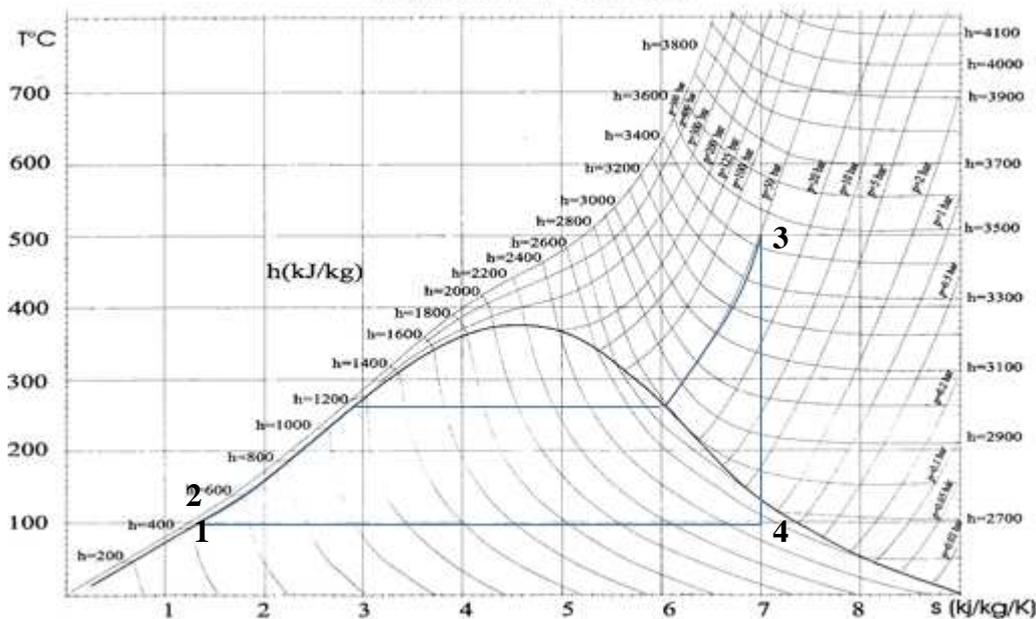
3.2 La courbe représentative d'une évolution isentropique est, dans le diagramme (T,s), un segment vertical.

3.3 Cycle de Rankine



P ₁ = 1 bar	P ₂ = 50 bar	P ₂	P ₁	P ₁ = 1 bar
t ₁ = 100 °C	t ₁	t ₃ = 500 °C		t ₁
Liq sat	Liq	Vapeur	Liq - Vap	Liq sat

Diagramme T- S de l'eau



3.4

T ₁	h ₃	h ₄	s ₄	s _v (T ₁)	s _l (T ₁)
100 °C	3440 kJ/kg	2520 kJ/kg	7,0 kJ/kg/K	7,4 kJ/kg/K	1,4 kJ/kg/K

3.5 S est une grandeur extensive donc $s_4 = (1-x_4) s_l(T_1) + x_4 s_v(T_1)$

D'où $x_4 = \frac{s_4 - s_l(T_1)}{(s_v(T_1) - s_l(T_1))}$

A.N. x₄ = 0,93 (cohérent avec le fait que 4 est proche de la courbe de rosée)

3.6 Il n'y a pas de travail massique indiqué dans le condenseur, ni dans le générateur de vapeur. Donc en utilisant le premier principe :

q_{cond} = h₁ - h₄ = - 2080 kJ/kg

q_{GV} = h₃ - h₂ = 2965 kJ/kg

La pompe et la turbine sont adiabatiques donc en utilisant le premier principe :

w_{pompe} = h₂ - h₁ = 35 kJ/kg

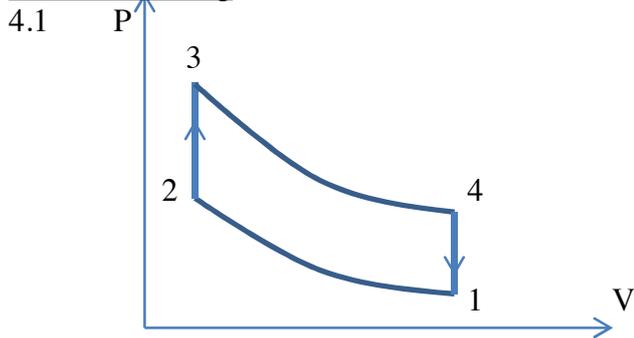
w_{turb} = h₃ - h₄ = 920 kJ/kg.

On vérifie bien que sur un cycle $q_{cond} + q_{GV} + w_{pompe} + w_{turb} = 0$

3.7 w_{alt} = - (w_{pompe} + w_{turb}) = 885 kJ/kg

3.8 Il s'agit d'un cycle moteur. Le rendement est le rapport de l'énergie utile (travail fourni w_{alt}) sur l'énergie coûteuse (quantité de chaleur reçue q_{GV}) : $\eta = w_{alt}/q_{GV} = 0,30$

4 Moteur Stirling



Le cycle est moteur :
 L'aire A est positive car le cycle est décrit dans le sens horaire
 Or $W_{cycle} = \oint_{cycle} -PdV = -A$
 Donc $W < 0$ (moteur)

4.2 La transformation est isotherme et réversible :

$$W_{12} = \int_1^2 -PdV = -nRT_1 \ln(V_2/V_1) \text{ donc } W_{12} = nRT_1 \ln \rho (>0, \text{ cohérent avec compression})$$

Pour un gaz parfait, lors d'une telle transformation, $\Delta U = C_v \Delta T = 0 = W_{12} + Q_{12}$ d'après le premier principe. D'où $Q_{12} = -nRT_1 \ln \rho (<0)$

4.3 La transformation est isochore réversible donc $W_{23} = 0$ et $T_2 = T_1$

D'après le premier principe $Q_{23} = \Delta U = C_v (T_3 - T_1)$ ou $Q_{23} = nR/(\gamma-1) (T_3 - T_1) (>0, \text{ cohérent avec réchauffement par régénérateur et chaudière})$

4.4 La détente est isotherme et réversible et $V_4/V_3 = V_1/V_2 = \rho$ donc :

$$W_{34} = -nRT_3 \ln \rho (<0, \text{ cohérent avec détente})$$

Comme en 4.2, $Q_{34} = -W_{34} = nRT_3 \ln \rho (>0)$

4.5 La transformation est isochore et réversible et $T_4 = T_3$ donc comme en 4.3 :

$$Q_{41} = nR/(\gamma-1) (T_1 - T_3) (<0, \text{ refroidissement})$$

4.6 La grandeur coûteuse devient Q_{34} car elle est positive.

D'après le premier principe $W + Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41} = 0$ soit $W = -(Q_{12} + Q_{34})$ ou $W = W_{12} + W_{34}$

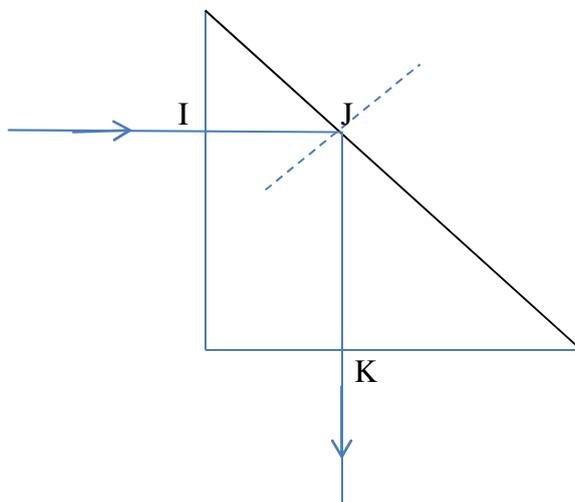
Le rendement est $\eta' = -W / Q_{34} = 1 + Q_{12}/Q_{34}$ donc $\eta' = 1 - T_1/T_3$

On retrouve le rendement maximal du cycle moteur réversible de Carnot.

A.N $\eta' = 0,50$

Troisième partie : périscope

5.1



En I : l'angle d'incidence est nul donc le rayon entre dans le prisme sans être dévié

En J : l'angle d'incidence r est égal à 45° .

L'usage de calculatrices est interdit.

PREMIERE PARTIE DIFFUSION — LOI DE FICK

A1. Fick s'est appuyé sur la loi de Fourier (transferts thermiques) pour élaborer sa théorie.

A2. La loi de Fick s'écrit $\vec{j}_D = -D \text{grad } n$. Ce n'est pas une loi fondamentale ; elle a été établie sur un modèle linéaire, en partant du constat que quand une substance n'est pas de concentration uniforme, elle diffuse depuis les zones de forte concentration vers les zones moins concentrées. Et le courant de particules est d'autant plus fort que la concentration varie plus vite spatialement, d'où le gradient. Ainsi, \vec{j}_D est de sens opposé à $\text{grad } n$.

A3. Bilan de matière sur un volume élémentaire de section S et d'épaisseur dx :

$$n(x, t + dt)S dx = n(x, t)S dx + j_D(x, t)S dt - j_D(x + dx, t)S dt, \text{ d'où } \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j_D}{\partial x} = 0,$$

ce qui donne bien l'équation de la diffusion : $\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$.

A4. Par une analyse dimensionnelle, $\frac{n}{\tau} \sim D \frac{n}{L^2}$, d'où $L \sim \sqrt{D\tau}$ caractéristique L du phénomène de diffusion en fonction de l'ordre de grandeur τ de sa durée et du coefficient de diffusion D.

A5. Dans le cas où le coefficient de diffusion varie avec la concentration de l'espèce diffusante, il faut revenir à

l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial n}{\partial x} \right)$.

Mode de résolution de cette équation ??

A6. Il n'y a pas vraiment de lien avec « la loi d'Ohm locale », mais l'auteur du sujet attend ici $\vec{j}_T = n\vec{v}$ pour la seule convection. Le bilan de matière donne alors $\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j_D}{\partial x} + \frac{\partial j_T}{\partial x} = 0$. Dans le cas particulier où D et v sont indépendants de la densité de particules (donc de x), on obtient :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v \frac{\partial n}{\partial x} - D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = 0$$

A7. Commençons par signaler une erreur d'énoncé : N_0 est un nombre d'atomes par unité de surface et non de volume !!

On remplace l'expression de N(x,t) dans l'équation de **A3** :

$$\frac{-K}{2t^{3/2}} \exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right) + \frac{K}{\sqrt{t}} \frac{ax^2}{t^2} \exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{DK}{\sqrt{t}} \left(-\frac{2ax}{t}\right) \exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right) \right)$$

Ou : $\frac{-K}{2t^{3/2}} + \frac{K}{\sqrt{t}} \frac{ax^2}{t^2} = \frac{DK}{\sqrt{t}} \left(-\frac{2a}{t} + \frac{4a^2x^2}{t^2}\right)$, soit $\frac{-1}{2} + \frac{ax^2}{t} = D \left(-2a + \frac{4a^2x^2}{t}\right)$, puis $(4aD - 1) \left(1 - \frac{ax^2}{t}\right) = 0$

Ceci devant être vrai pour tout x et tout t, on en déduit $4aD = 1$. A t fixé,

$$N_0 = \int_0^\infty \frac{K}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{ax^2}{t}\right) dx = \int_0^\infty \frac{K}{\sqrt{t}} \exp(-4aDu^2) 2\sqrt{Dt} du = K \int_0^\infty \exp(-u^2) 2\sqrt{D} du = K\sqrt{\pi D} \text{erf}(\infty).$$

On en déduit $K = \frac{N_0}{\sqrt{\pi D}}$.

A8. On voit que N(x,t) tend à devenir de plus en plus constant par rapport à x à mesure t augmente, car la concentration s'homogénéise.

L'aire sous chaque courbe (prise jusqu'à x infini) vaut N_0 .

Signalons une nouvelle erreur d'énoncé : Il faut lire : « Déterminer, à un instant t donné (en adoptant par exemple t = 1h), la profondeur d'implantation L des atomes de silicium correspondant à une concentration moitié de la concentration injectée en x = 0 ». Pour t = 1h, on trouve $L = 0,7 \mu\text{m}$.

A9. Pour déterminer le coefficient de diffusion D du silicium dans AsGa, on peut placer un capteur en x_0 , et y enregistrer $N(x_0, t)$ en fonction du temps, puis tracer $\ln(\sqrt{t}N(x_0, t))$ en fonction de x_0^2/t , et la courbe devrait être une droite, de pente $-a = \frac{-1}{4D}$.

Pour estimer l'ordre de grandeur du coefficient de diffusion D , on utilise $D \sim \frac{L^2}{\tau}$, avec $L = 0,7 \mu\text{m}$ pour $\tau = 1\text{h}$, $L = 1,0 \mu\text{m}$ pour $\tau = 2\text{h}$, $L = 1,7 \mu\text{m}$ pour $\tau = 6\text{h}$. A chaque fois, on trouve environ $D = 1,4 \cdot 10^{-16} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

DEUXIEME PARTIE DIFFUSION DES MOLECULES D'UN COLORANT ENTRE DEUX SOLUTIONS

B1. Variation d'énergie potentielle d'une molécule de colorant, de masse molaire M_C , lors de son déplacement dans le champ de la pesanteur de l'ordre de la hauteur h de la cuve : $\frac{M_C}{N_A} gh \approx 1,6 \cdot 10^{-25} \text{J}$.

Energie d'agitation thermique de cette molécule : $k_B T \approx 4 \cdot 10^{-21} \text{J}$.

En conclusion, on peut négliger la pesanteur dans la suite du problème.

B2. La concentration finale attendue à l'interface des deux bacs, est la moyenne arithmétique des 2 concentrations initiales : $C(0, \infty) = \frac{C_1 + C_2}{2}$. On verra même que ceci est vrai dès que le phénomène de diffusion est amorcé (pas seulement quand il est achevé).

Remarque importante : l'auteur de l'énoncé a choisi sur la figure 2 un axe Oz vers le bas, allant de la zone 1 à la zone 2, avec $C_1 > C_2$. Cela doit conduire à une fonction $C(z, t)$ décroissante de z (à chaque instant), puis à un indice $n(z, t)$ également décroissant en fonction de z . La composante selon Oz du grad de n serait négative pour tout z , et passerait par un minimum en $z=0$, au lieu d'un maximum comme cela est dit à la question B6. De plus, le rayon de courbure donné par la relation $\frac{1}{R} \cong \frac{1}{n} \frac{\partial n(z, t)}{\partial z}$ (donnée juste avant la figure 3) serait négatif. Je pense donc que

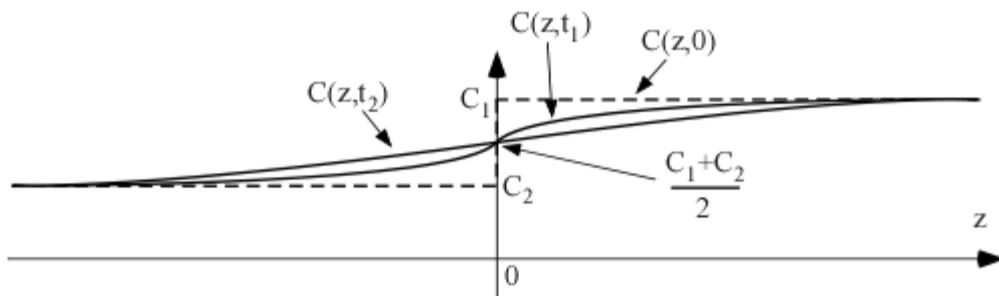
l'auteur avait imaginé un axe Oz dans le sens inverse : de la zone 2 vers la zone 1. Je fais ce choix pour la suite.

B3. $C_1 = A \operatorname{erf}(+\infty) + B = A + B$. $C_2 = A \operatorname{erf}(-\infty) + B = -A + B$.

Il vient donc $A = \frac{C_1 - C_2}{2}$ et $B = \frac{C_1 + C_2}{2}$.

La loi de répartition de concentration s'écrit donc $C(z, t) = \frac{C_1 - C_2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{2\sqrt{Dt}}} \exp(-s^2) ds + \frac{C_1 + C_2}{2}$.

B4. Allure du profil de concentration à trois instants successifs : $t = 0, t_1$ puis $t_2 > t_1$



On voit que la concentration tend à devenir de plus en plus lisse et uniforme.

Détermination expérimentale du coefficient de diffusion

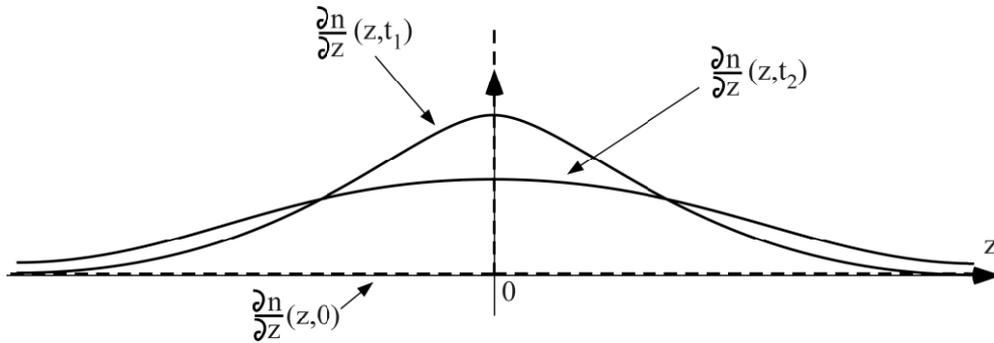
B5. Puisque $n_1 = n_0 + K C_1$ et $n_2 = n_0 + K C_2$, on peut écrire $K = \frac{n_1 - n_2}{C_1 - C_2}$.

NB : il y avait déjà un K dans le début du problème, qui n'a rien à voir avec celui-ci.

B6. On a $\overrightarrow{\text{grad}} n = K \frac{\partial C}{\partial z} \vec{u}_z = KA \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}}\right)^2\right) \frac{\partial\left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}}\right)}{\partial z} \vec{u}_z$, d'où sa composante selon l'axe Oz :

$$\frac{\partial n}{\partial z} = \frac{n_1 - n_2}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp\left(-\frac{z^2}{4Dt}\right)}{2\sqrt{Dt}}. \text{ A } t \text{ donné, cette quantité est maximale en } \boxed{z=0} \text{ et vaut } \left(\frac{\partial n}{\partial z}\right)_{\max} = \frac{n_1 - n_2}{2\sqrt{\pi Dt}}.$$

B7. Allure de cette fonction $\frac{\partial n}{\partial z}$ à trois instants successifs, $t = 0$, t_1 puis $t_2 > t_1$:

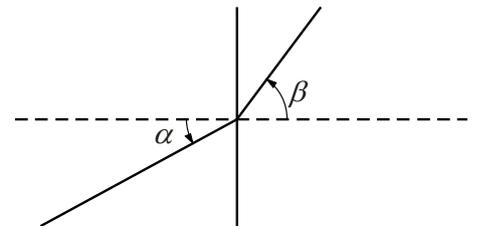


A mesure que le temps passe, la concentration tend à s'uniformiser, donc le gradient à devenir faible partout, mais pas nul puisque les concentrations restent différentes aux 2 extrémités, selon les hypothèses de l'énoncé.

B8. Puisque α est proportionnel à $1/R$, et que n évolue de façon douce et monotone, on peut estimer que α est maximal pour $\boxed{z=0}$.

B9. Le schéma ci-contre illustre la trajectoire du rayon lumineux à la traversée de la paroi de sortie de la cuve en verre d'épaisseur supposée nulle. Pour z donné, $n(z) \sin \alpha = n_a \sin \beta$, d'où $n(z) \sin \alpha = \sin \beta$, et avec l'approximation des petits angles, $\beta \approx \alpha n$, ou encore $\beta \approx \frac{d}{R} n$, puis

$$\boxed{\beta \approx d \frac{\partial n}{\partial z}}.$$



On en déduit la déflexion verticale globale H du rayon : $H = R(1 - \cos \alpha) + L \tan \beta \approx R \frac{\alpha^2}{2} + Ld \frac{\partial n}{\partial z}$.

Le premier terme étant d'ordre 2, on peut écrire $\boxed{H \approx Ld \frac{\partial n}{\partial z}}$.

B10. La déflexion verticale maximale est alors $\boxed{H_{\max} \approx Ld \frac{n_1 - n_2}{2\sqrt{\pi Dt}}}$.

L'aspect de l'écran est représenté ci-contre.

Pour déterminer le coefficient de diffusion D , on peut mesurer H_{\max} au cours du temps et le tracer en fonction de $\frac{1}{\sqrt{t}}$.

Les paramètres qui influent majoritairement sur la précision de détermination du coefficient de diffusion sont donc L , d , n_1 et n_2 .

