

Devoir 12 - Corrigé

Concours Centrale Supélec 2016, physique 2 PC

Vers une nouvelle définition du kelvin

I L'agitation thermique

IA) L'agitation thermique dans l'atmosphère

IA1)

a) A partir de l'équation de la statique des fluides projetée sur l'axe vertical ascendant

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

dans l'hypothèse de l'atmosphère gaz parfait

$$PV = nRT \quad \text{d'où} \quad \rho = \frac{m_{\text{tot}}}{V} = \frac{nM}{V} = \frac{PM}{RT}$$

Si l'atmosphère est isotherme, $T = \text{cste}$ d'où par intégration, avec $P(z=0) = P_o$

$$P(z) = P_o \exp(-Mgz/RT)$$

b) En considérant une masse moyenne m par molécule constituant l'atmosphère,

$$M = m N_A \quad \text{et} \quad R = k_B N_A \quad \text{d'où} \quad P(z) = P_o \exp(-mgz/k_B T)$$

d'où $n_v(z) = \frac{n}{V} N_A = \frac{P}{k_B T} = N_o \exp\left(\frac{-mgz}{k_B T}\right)$: on retrouve une statistique de Boltzmann,

$$mgz = E_{pp} \quad \text{énergie potentielle de pesanteur,} \quad n_v(z) = N_o \exp\left(\frac{-E_{pp}}{k_B T}\right)$$

IA2) En écrivant $n_v(z)$ sous la forme $n_v(z) = N_o \exp\left(\frac{-z}{H}\right)$ on identifie la hauteur

caractéristique de l'atmosphère : $H = \frac{k_B T}{mg}$

La vitesse limite atteinte en chute libre s'obtient par conservation de l'énergie mécanique :

$$E_{\text{min}} = mgH = E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_l^2 \quad \text{d'où} \quad v_l = \sqrt{2gH} \quad \text{où encore en exprimant } H : \quad v_l = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$$

on retrouve une expression proche de la vitesse quadratique moyenne atteinte pour un

gaz à la température T : $v_l = \sqrt{\frac{2}{3}} v_q$: ces deux vitesses qui caractérisent l'atmosphère isotherme sont bien du même ordre de grandeur.

Remarque: Pour l'atmosphère, plutôt diatomique (O₂ 19%, N₂ 80%, autres 1%), les auteurs auraient dû proposer $v_q^2 = \frac{5k_B T}{m}$

IA3) Quelques pistes pour cette question :

Le centre de gravité de la balle est immobilisé, mais il reste une agitation thermique, désordonnée, de toutes les particules qui la composent ?

En terme d'énergie localement, cette énergie cinétique des molécules se transforme en énergie potentielle de déformation ?

Autre piste le mouvement des particules est aléatoires, vectoriellement la vitesse du centre de gravité est alors nulle ?

IB L'agitation thermique dans un circuit électrique

IB1) La vitesse d'agitation thermique des électrons dans le métal est donnée en ordre de grandeur par la vitesse quadratique $v_q = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$ d'où pour $T \sim 300\text{K}$ $v_q \sim 10^5 \text{ms}^{-1} \ll c$

: ces électrons ne sont pas relativistes !

IB2) Les deux relations s'obtiennent à partir des lois de Kirchhoff :

- loi des mailles :
$$u_e = u_s + L \frac{di_e}{dt}$$

- loi des nœuds :
$$i_e = i_s + C \frac{du_s}{dt}$$

IB3) a) les mêmes relations s'appliquent sur le schéma de la ligne bifilaire proposée :

$$u(x, t) = u(x + dx, t) + \lambda dx \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad \text{qui donne au premier ordre en } dx : \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial i}{\partial t} \quad (1)$$

puis $i(x, t) = i(x + dx, t) + \gamma dx \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial t}$ qui donne au premier ordre en dx :

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\gamma \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2)$$

b) l'équation de d'Alembert vérifiée par i et u s'obtient alors en découplant les équations et en utilisant le théorème de Schwartz :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial i}{\partial t} \right) = -\lambda \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right) = \gamma \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c_e^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3) \quad \text{avec}$$

$$c_e = \frac{1}{\sqrt{\gamma \lambda}} \quad (4)$$

c) En remplaçant dans l'équation de d'Alembert on obtient l'équation de dispersion pour les ondes planes harmoniques se propageant selon les x croissants : $\omega = k c_e$. La résistance caractéristique s'obtient en remplaçant dans une des équations de couplage,

par exemple dans (1) : $-ik U = -\lambda (-i\omega) I$ d'où $R_c = \frac{U}{I} = \lambda \frac{\omega}{k} = \lambda c_e = \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}$ (5)

Ces relations peuvent être inversées : (5) donne $\lambda = \frac{R_c}{c_e}$ puis (4) $\gamma = \frac{1}{\lambda c_e^2} = \frac{1}{R_c c_e}$

IB4) a) L'équation vérifiée par $U(x)$ s'obtient en remplaçant $u(x, t)$ dans (3) :

$$U''(x) \cos(\omega t) = \frac{1}{c_e^2} (-\omega^2) U(x) \cos(\omega t) \quad \text{d'où} \quad U''(x) + \frac{\omega^2}{c_e^2} U(x) = 0$$

équation d'un oscillateur harmonique. Les conditions aux limites $U(0) = U(D) = 0$ fixent la forme de la solution : on pose $K = \frac{\omega}{c_e}$

$$U(0)=0 \text{ impose } U(x)=U_o \sin(Kx)$$

$$U(D)=0 \text{ impose } KD=n\pi \text{ avec } n \text{ entier, d'où } K_n=\frac{n\pi}{D} \text{ et } U(x)=U_{on} \sin(K_n x) :$$

mode propre n, associé à la pulsation $\omega_n=c_e K_n=\frac{n\pi c_e}{D}$

b) L'intervalle entre deux fréquences propres consécutives est $\delta f=\frac{\delta \omega}{2\pi}=\frac{c_e}{2D}$ donc si

$$\Delta f \text{ est grand } N=\frac{\Delta f}{\delta f}=\frac{2D\Delta f}{c_e} \text{ (à une unité près, } \ll N)$$

c) $i_n(x, t)$ est donné par $u_n(x, t)$ à partir de (1) ou (2) :

$$\frac{\partial i_n(x, t)}{\partial x}=-\gamma \frac{\partial (U_{on} \sin(K_n x) \cos(\omega_n t))}{\partial t}=\gamma \omega_n U_{on} \sin(K_n x) \sin(\omega_n t)$$

qui s'intègre, avec l'hypothèse $i_n(x, t)=0$ lorsque $U_{on}=0$, sous la forme :

$$i_n(x, t)=\frac{-\gamma \omega_n}{K_n} U_{on} \cos(K_n x) \sin(\omega_n t)$$

avec $\gamma \frac{\omega_n}{K_n}=\frac{1}{R_c c_e} c_e=\frac{1}{R_c}$ donc $i_n(x, t)=\frac{-U_{on}}{R_c} \cos(K_n x) \sin(\omega_n t)$

IB5) Sur une portion dx l'énergie emmagasinée dans le circuit pour le mode n est :

$$de_n=\frac{1}{2} \lambda dx i_n(x, t)^2+\frac{1}{2} \gamma dx u_n(x, t)^2=\frac{1}{2} \lambda dx \frac{U_{on}^2}{R_c^2} \cos^2(K_n x) \sin^2(\omega_n t)+\frac{1}{2} \gamma dx U_{on}^2 \sin^2(K_n x) \cos^2(\omega_n t)$$

d'où $\langle de_n \rangle=(\frac{1}{4} \gamma U_{on}^2 \cos^2(K_n x)+\frac{1}{4} \gamma U_{on}^2 \sin^2(K_n x)) dx=\frac{1}{4} \gamma U_{on}^2$: la densité linéique moyenne est uniforme

IB6)a) En intégrant sur la ligne de longueur D on en déduit

$$\langle E_n \rangle=\frac{1}{4} \gamma D u_{on}^2=\frac{D}{4 R_c c_e} u_{on}^2$$

on impose $\langle E_n \rangle=k_B T$ d'où $\frac{D}{4 R_c c_e} u_{on}^2=k_B T$ et

$$u_n(x, t)=\sqrt{\frac{4 R_c c_e k_B T}{D}} \sin(K_n x) \cos(\omega_n t)=\sqrt{2} U_{eff, n}(x) \cos(\omega_n t) \text{ avec}$$

$$u_{eff, n}(x)=\sqrt{\frac{2 R_c c_e k_B T}{D}} \sin(K_n x) \text{ et finalement } u_{eff, n}^2(x)=\frac{2 R_c c_e k_B T}{D} \sin^2(K_n x)$$

$$U_{eff, n}^2=\frac{2 R_c c_e k_B T}{D} \text{ indépendant de } n$$

b) Il y a N modes possibles dans l'intervalle de fréquence Δf donc

$$U_{eff}^2=N U_{eff, n}^2=\frac{2 D \Delta f}{c_e} \frac{2 R_c c_e k_B T}{D} \text{ d'où, avec } R=R_c \text{ le résultat attendu :}$$

$$U_{eff}=\sqrt{4 k_B T R \Delta f}$$

IB7)a) Je ne comprends pas bien comment la valeur de R peut être une variable puisque $R=R_c$

On poursuit à partir des résultats précédents...

On doit vérifier $U_{eff} \propto \sqrt{R}$ donc en log-log une relation linéaire de pente $\frac{1}{2}$, ce qui correspond bien aux deux courbes proposées, les deux décades de variation sur Δf se

traduisant par une décade de décalage entre les deux droites.

La détermination de k_B repose avoir sur l'exploitation d'un point particulier. Par exemple :

pour $\Delta f = 1 \text{ Hz}$, $R = 10^2 \Omega$, $U_{eff} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ V}$ d'où $k_B = \left(6 \frac{10^{-7}}{500}\right)^2 \frac{1}{4 \cdot 300 \cdot 10^2} = 1,2 \cdot 10^{-23} \text{ USI}$ ce qui donne bien l'ordre de grandeur attendu !

b) Les valeurs des tensions efficaces sont extrêmement faibles, il faut éliminer le bruit électromagnétique, d'où l'enceinte métallique qui isole des champs extérieurs.

La résistance peut chauffer, il faut thermostatier l'enceinte pour assurer une température constante.

I Confinement d'une particule chargée dans un champ magnétique

I.A Aurores polaires terrestres

I.A.1. cf. énoncé : « Les particules chargées accélérées dans la queue de la magnétosphère arrivent le long du champ sur les couches denses de l'atmosphère. »

Leurs collisions avec les molécules présentes excitent ces molécules (transfert d'énergie cinétique en énergie interne) qui se dés excitent ensuite en émettant un rayonnement dans le visible – notamment.

I.A.2. Symétrie de la figure 1 de l'énoncé par rapport au plan équatorial : lorsqu'une reconfiguration magnétique intervient, les particules guidées par les lignes de champ magnétique arrivent aussi bien dans l'hémisphère nord que dans l'hémisphère sud.

I.A.3. On reconnaît le champ d'un dipôle magnétique (présenté ci dessous) assez près de la Terre. A plus grande distance, le champ magnétique du vent solaire « tire » les lignes de champ (ldc) vers l'arrière (la droite sur la figure 1 de l'énoncé) : du côté de l'arrivée du vent solaire les ldc sont « aplaties » et à l'arrière on note que des ldc ne sont plus fermées.

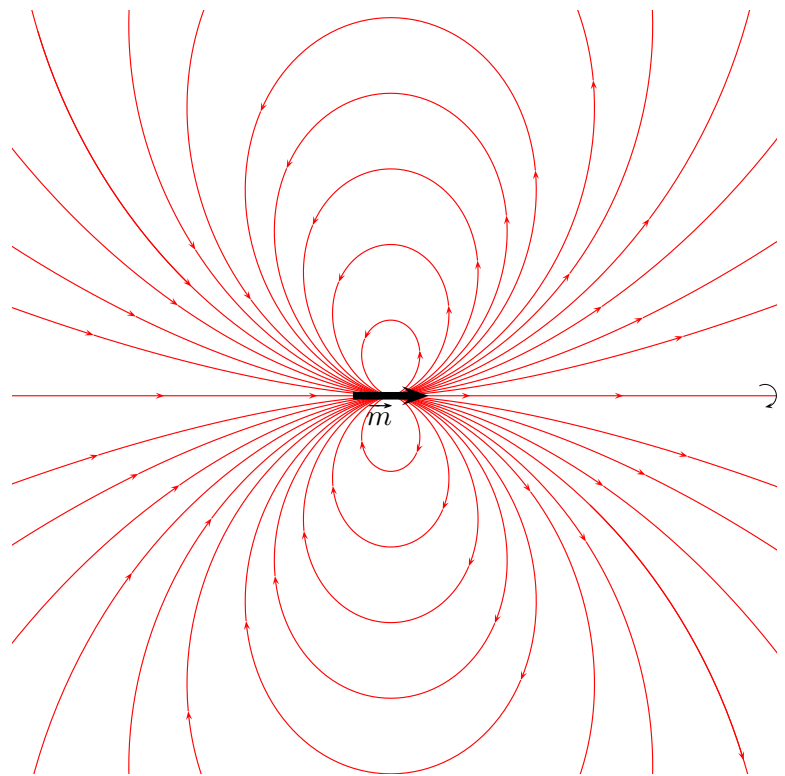


FIGURE 1 – Topographie du champ d'un dipôle magnétique ;

I.B Mouvement d'un électron dans un champ magnétique stationnaire et uniforme

I.B.1. On néglige le poids car $\|m\vec{g}\| \ll \|q\vec{v} \wedge \vec{B}\|$: le poids est inférieur à 10^{-26} N pour un proton et à 10^{-29} N pour une électron ; $\frac{1}{2}mv^2 = E_c \sim 10^{-16}$ J $\Rightarrow v_e \sim 10^7$ m.s $^{-1}$ et $v_p \sim 10^5$ m.s $^{-1}$ et avec $B \sim B_T \sim 10^{-5}$ T on a $F_{\text{magn}} \sim evB \sim 10^{-19}$ à 10^{-17} N.

I.B.2. La trajectoire est rectiligne uniforme à $\vec{v} = v_0 \vec{u}_z$ car alors $q\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ puisque $\vec{v} \parallel \vec{B}$. La particule chargée suit une ligne de champ rectiligne.

I.B.3. (a) Par analyse dimensionnelle $\omega_c = \frac{eB_0}{m_e}$.

Pour l'ordre de grandeur : le champ magnétique terrestre assimilé à celui d'un dipôle magnétique décroît comme $\frac{1}{r^3}$ donc $B_{\text{geo}} \sim \left(\frac{R_T}{r_{\text{geo}}}\right)^3 B_T \sim \left(\frac{6400}{42200}\right)^3 5.10^{-5} \sim 1,7.10^{-7} \text{ T}$ d'où $\omega_c \sim 3.10^4 \text{ rad.s}^{-1}$.

Rem : avec cet odg de B , l'approximation consistant à négliger le poids reste légitime.

- (b) Le fait de montrer que la trajectoire est circulaire est explicitement hors programme et doit être admis ce que nous ferons.

En coordonnées polaires, on projette alors la 2^e loi de Newton sur la direction radiale : $\frac{mv_0^2}{R_c} = ev_0 B$ d'où $R_c = \frac{mv_0}{eB} = \frac{v_0}{\omega_c}$.

En passant par l'équation cartésienne :

$$m \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix} = -e \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -\omega_c v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = \omega_c v_x \\ \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases} \text{ d'où } v_z = \text{cte} = 0$$

Le mouvement reste plan dans un plan orthogonal à \vec{B}_0 .

On pose les grandeurs complexes $\underline{r}(t) = x(t) + iy(t)$ et $\underline{u}(t) = v_x(t) + iv_y(t) = \frac{dr}{dt}$ qui vérifient

$$\frac{d\underline{u}}{dt} = i\omega_c \underline{u} \implies \underline{u}(t) = \underbrace{v_{0x}}_{\underline{u}(0)} e^{i\omega_c t} \implies \underline{r}(t) = i \frac{v_{0x}}{\omega_c} (1 - e^{i\omega_c t}) \text{ par intégration avec la CI } \underline{r}(0) = 0$$

On prend les parties réelle et imaginaire et on a $x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_c} \sin \omega_c t$ et $y(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_c} (1 - \cos \omega_c t)$.

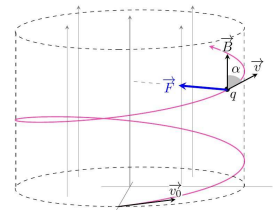
On retrouve bien sur $R_c = \frac{mv_0}{eB} = \frac{v_{0x}}{\omega_c}$ avec $x^2(t) + (y(t) - R_c)^2 = R_c^2$; la trajectoire est un cercle de centre $(0; R_c)$ de rayon R_c parcouru (dans le sens trigonométrique) à la pulsation ω_c .

- I.B.4. (a) Par analyse dimensionnelle avec $\left[\frac{e^2}{\varepsilon_0 L}\right] = \text{énergie (potentielle)} = \text{puissance} \times \text{temps}$ et $[c] = \frac{L}{t}$ on obtient $\alpha = 2$ et $\beta = -3$.

- (b) $E = E_c = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\omega_c^2 R_c^2 \implies dE = m\omega_c^2 R_c dR_c = -P_{\text{ray}} dt = -\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \underbrace{\omega_c^4 R_c^2}_{\|\vec{a}\|^2} dt$ d'où $\frac{dR_c}{dt} = -\frac{R_c}{\tau}$ et $R_c(t) = R_c(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \frac{6\pi\varepsilon_0 c^3 m}{e^2 \omega_c^2} = \frac{6\pi\varepsilon_0 c^3 B_0}{e\omega_c^3}$. La particule spirale jusqu'à s'arrêter au bout de quelques τ .

AN : avec $\omega_c \sim 3.10^4 \text{ rad.s}^{-1}$: $\tau \sim 1,8.10^{14} \text{ s} \sim 6 \text{ millions d'années!}$ Ce phénomène est donc négligeable à l'échelle d'observation.

- I.B.5. Il y a superposition des deux mouvements étudiés précédemment : superposition d'une translation uniforme selon Oz et du mouvement circulaire uniforme dans le plan (Oxy) d'où un mouvement hélicoïdal (cf. ci-contre) s'enroulant autour des ldc magnétiques.



I.C Mouvement d'un électron dans un champ stationnaire et non uniforme

- I.C.1. (Maxwell-Thomson) $\text{div } \vec{B} = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial(r B_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$.

On est proche de l'axe donc on suppose que $B_z(r, z) \simeq B_{\text{axe}}(z) = B_z(z)$ d'où $\frac{\partial(r B_r)}{\partial r} = -r \frac{dB_z}{dz}$ qui donne par intégration $r B_r(r, z) = -\frac{r^2}{2} \frac{dB_z}{dz} + \mathbf{f}(z)$. Pas de divergence sur l'axe donc en faisant $r = 0$, on obtient $\mathbf{f}(z) = 0$ d'où le résultat : $B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz}$.

I.C.2. L est l'échelle caractéristique de variation de B_z selon z donc $\frac{dB_z}{dz} \sim \frac{B_z}{L}$ et avec la question précédente $B_r \sim \frac{r}{L} B_z$. On pourra donc considérer la composante radiale B_r comme une petite perturbation de la composante axiale B_z tant que $r \ll L$.

I.C.3. Avec l'approximation ci-dessus on peut utiliser le résultat de la question B.3)b) soit $R(z) = \frac{m v_\theta}{e B_z(z)}$.

I.C.4. On assimile le mvt de l'électron à une boucle de courant de moment magnétique $M_z = I S = I \pi R^2(z)$, où $I = \frac{\delta q}{dt} = \frac{-e}{T}$ car débit de charge d'un électron par tour parcouru en une période $T = \frac{2\pi R(z)}{v_\theta}$.

On a donc $M_z = -\frac{e R(z) v_\theta}{2} = -\frac{e}{2m} L_z$ en identifiant $L_z = m R(z) v_\theta$.

I.C.5. TMC à l'électron dans (R) projeté sur \vec{u}_z : $\frac{dL_z}{dt} = (\vec{M} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_z \simeq 0$ au premier ordre donc L_z et $M_z = -\frac{e}{2m} L_z$ peuvent être considérés comme des constantes du mouvement au premier ordre.

I.C.6. (a) c.f. cours MPSI, le TEC donne la conservation de l'énergie cinétique d'où $v_z^2 + v_\theta^2 = \text{cte} = v^2$ où v est la norme – constante – de la vitesse.

La conservation du moment magnétique M_z implique $\frac{v_\theta^2}{B_z} = \text{cte}$ soit $\frac{v_\theta^2}{1 + \frac{z^2}{L^2}} = v_{\theta,0}^2$ où $v_{\theta,0}$ est la vitesse orthoradiale dans le plan $z = 0$.

Ainsi $v_z^2 = v^2 - v_\theta^2 = v^2 - v_{\theta,0}^2 \left(1 + \frac{z^2}{L^2}\right) \geq 0$ d'où un confinement entre $[-z_{\max}; z_{\max}]$ où $z_{\max} = L \sqrt{\frac{v^2}{v_{\theta,0}^2} - 1}$ (points de rebroussement).

(b) La conservation de l'énergie cinétique s'écrit $E_c = \frac{1}{2} m \left(v_z^2 + v_{\theta,0}^2 \left(1 + \frac{z^2}{L^2}\right) \right) = \text{cte}$, ou encore avec l'expression de M_z dans le plan $z = 0$ et en éliminant la constante inutile : $\frac{1}{2} m v_z^2 + \frac{M_z B_0}{L^2} z^2 = \text{cte}$, où on reconnaît l'expression de la conservation de l'énergie pour un OH 1D de pulsation propre $\omega_m = \sqrt{\frac{2M_z B_0}{mL^2}}$.

Temps d'aller-retour : $T_{ar} = \frac{2\pi}{\omega_m}$ et on peut réécrire $\omega_m \sim \frac{\sqrt{E}}{L}$ donc avec un électron ($m \sim 10^{-30}$ kg) d'énergie de qqs keV, avec $L \sim$ qqs 10^6 m, on obtient $T_{ar} \sim 1$ s.

I.C.7. (a) Il s'agit d'un rayonnement d'accélération proportionnel à ω^4 donc d'autant plus important que B augmente, le rayonnement est donc particulièrement intense près de la Terre, aux pôles puisque c'est là que les particules chargées sont guidées par les lds magnétiques.

(b) $\omega = \frac{eB}{m} \sim \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{-5}}{10^{-30}} \sim 9 \cdot 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$ d'où $f \sim 1,4$ MHz et $\lambda = 200$ m (cohérent avec le document où $\lambda = \frac{c}{f} \sim$ km). On sait que les ondes EM de cette fréquence ne traversent pas l'ionosphère, il faut donc être au dessus de celle-ci pour pouvoir l'observer.

I.D Ceintures de Van Allen

$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \sim 0,1$ à 1 GeV $\Rightarrow v \sim 10^{10} \text{ m.s}^{-1}$! Le mvt de l'électron est donc fortement relativiste ! Toute l'étude est à reprendre dans ce cadre !