

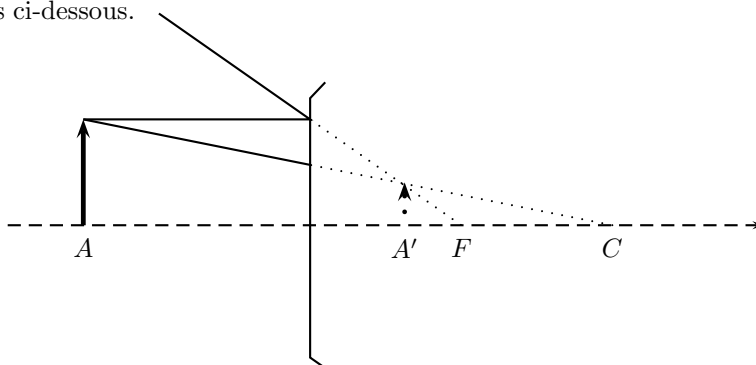
Corrigé du devoir n°11

Deuxième partie : observation de la Terre

A A1 Conditions de Gauss : rayons proches de l'axe optique et peu inclinés sur ce dernier.

Propriétés : stigmatisme et aplanétisme approchés.

A2 Construction de rayons ci-dessous.



A3 Relation de conjugaison des miroirs sphériques : $\frac{1}{SA} + \frac{1}{SA'} = \frac{2}{SC}$.

Grandissement transversal : $\gamma = \frac{-SA'}{SA}$.

A4 L'objet visé est très lointain (par rapport au rayon de courbure du miroir \mathcal{M}_1). Donc l'image intermédiaire est dans le plan focal image de \mathcal{M}_1 .

A5 Le foyer image du télescope est l'image de F'_1 par \mathcal{M}_2 . D'après la relation de conjugaison écrite ci-dessus, $\overline{S_2F'} = \frac{\overline{S_2F'_1} \cdot \overline{S_2C_2}}{2\overline{S_2F'_1} - \overline{S_2C_2}}$. D'où $D = -d + R_2 \frac{R_1/2 - d}{2d - R_1 + R_2}$.

A6 Grandissement par \mathcal{M}_1 : $\gamma_1 = \frac{-R_1}{2h}$. Grandissement par \mathcal{M}_2 : $\gamma_2 = \frac{-\overline{S_2F'}}{\overline{S_2F'_1}} = -\frac{d+D}{d-R_1/2}$.

Conclusion : $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ soit $\gamma = \frac{R_1(d+D)}{2h(d-R_1/2)}$.

A7 A.N. : $\gamma = -1, 2 \cdot 10^{-6}$: l'image est renversée.

A8 La lentille mince qui aurait même grandissement aurait une focale image f'_L vérifiant $\gamma = \frac{f'_L}{-h}$. D'où $f'_L = 1$ m.

A9 Le système Cassegrain est moins encombrant qu'une lentille unique et on évite les problèmes d'aberration chromatique.

A10 Il faut placer le capteur dans le plan focal image du télescope.

A11 La résolution est $\frac{\delta}{|\gamma|} \approx 10$ m.

A12 En multipliant par le nombre de pixels, on trouve un champ de vision de 60 km environ.

A13 Pour une résolution de 2,5 m, la taille des pixels doit être de $13/4 \approx 3,2 \mu\text{m}$.

A14 Le diamètre de la tache d'Airy vaut $1,22 \frac{\lambda}{a} 2f' = 2,44\lambda$. La limite de résolution due à la diffraction est au maximum de $2 \mu\text{m}$ pour $\lambda = 0,8 \mu\text{m}$.

On voit ici que la tache de diffraction est plus petite que la taille d'un pixel. Donc ce n'est pas la diffraction qui limite la résolution ici.

B B1 Pour cette lame d'air (d'indice optique égal à 1), éclairée en incidence normale, la différence de chemin optique vaut $2e$.

L'éclairement vaut alors $\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi e}{\lambda} \right) \right]$. L'éclairement est donc uniforme. En revanche, quand e varie, l'éclairement varie sinusoidalement.

B2 On élargit la source : les interférences sont alors localisées à l'infini. On les observe dans le plan focal image d'une lentille convergente. On déplace ensuite le miroir M_2 de façon à faire rentrer les anneaux au centre. Ces anneaux deviennent de plus en plus grands. Au contact optique, on doit avoir un écran uniformément éclairé de même couleur que la source. Le contrôle se fait en lumière blanche.

B3 On observe des franges d'égale épaisseur, c'est-à-dire des franges rectilignes, parallèles à l'arête du coin d'air formé par M_1 et M'_2 qui est l'image de M_2 par la séparatrice. Elles sont localisées sur le coin d'air si la source est suffisamment large.

La différence de marche vaut $\delta(x) = 2e(x)$ où $e(x)$ est l'épaisseur locale du coin d'air. Or $e(x) = \alpha x$ d'où l'in-

terfrange $i = \frac{\lambda}{2\alpha}$.

Remarque : on peut retrouver ce résultat en remarquant qu'il s'agit de la superposition de deux ondes planes dont les vecteurs d'onde font un angle entre eux de 2α .

B4 Soit $d(r)$ la distance entre P et le plan Π' . On trouve $d(r) = R - \sqrt{R^2 - r^2} \approx \frac{r^2}{2R}$ avec les approximations suggérées. Finalement,

$$z(r) = e_0 + H_{\max} - \frac{r^2}{2R}.$$

B5 Différence de marche : $\delta(r) = 2z(r) = 2(e_0 + H_{\max}) - \frac{r^2}{R}$. On constate que les lieux de différence de marche constante (donc d'ordre d'interférence constant) vérifient $r = \text{Cte}$. Ce sont bien des cercles.

B6 En $r = 0$, l'ordre vaut $p_0 = \frac{2(e_0 + H_{\max})}{\lambda}$.

D'après ce qui précède, l'ordre d'interférence diminue du centre vers les bords. Soit $p_1 = p_0 - \frac{\rho_1^2}{R\lambda}$ l'ordre d'interférence du premier anneau brillant en partant du centre. Alors, l'ordre d'interférence du k^{e} anneau brillant vaut $p_k = p_1 - (k_1) = p_0 - \frac{\rho_k^2}{R\lambda}$. Il vient $\rho_k^2 - \rho_1^2 = R\lambda(k - 1)$ soit $\rho_k = \sqrt{\rho_1^2 + R\lambda(k - 1)}$.

B7 Sur la figure, le centre est brillant ainsi que l'extérieur. Les ordres d'interférences correspondant aux épaisseurs e_0 et $e_0 + H_{\max}$ sont donc entiers.

Le défaut correspond à la zone où on voit les anneaux. Le diamètre vaut donc $d = 3,9 \pm 0,1$ mm.

Il y a trois anneaux brillants entre le centre et l'extérieur donc l'ordre d'interférence a varié de 4 et la hauteur du défaut vaut donc $H_{\max} = 2\lambda = 1,3 \mu\text{m}$ (C'est difficile de ne garder qu'un seul chiffre significatif!).

On suppose $e_0 > 0$ et on chariote le miroir M_2 pour faire diminuer e_0 .

- Si le miroir est concave comme dans l'énoncé, l'ordre d'interférence, maximal au centre, va diminuer. Les anneaux vont rentrer.
- En revanche, si le miroir est convexe, l'ordre d'interférence est minimal au centre et les anneaux vont sortir.

B8 La différence de marche vaut $\delta(x) = 2z(x)$.

B9 L'échelle semble être de 1,6 cm pour 20 km. L'ordre de grandeur de la taille de la zone concernée vaut 3,2 cm soit 40 km.

On voit 3 anneaux donc $2H_{\max} = 3\lambda$ soit $H_{\max} = 8,5$ cm.

La vitesse moyenne d'élévation du sol, sur ces 4 années, vaut alors $V = 2,1 \text{ cm} \cdot \text{an}^{-1}$.

La méthode est assez sensible. Tout en restant dans le domaine radio, on pourrait choisir d'autres longueurs d'onde. Cela permet de repérer des variations de hauteur de l'ordre du centimètre, en ayant retiré les autres causes de variation (végétation, érosion...).

Troisième partie : Communications spatiales

1 Pour un ion (un cation), l'équation du mouvement s'écrit : $M_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} = +e\vec{V}_i \wedge \vec{B} + e\vec{E} + M_i \vec{g}$.

Pour un électron : $m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{v}_e \wedge \vec{B} - e\vec{E} + m_e \vec{g}$.

Pour négliger l'action magnétique, il faut que les vitesses des charges soient faibles devant la célérité de la lumière.

D'autre part, le poids est négligeable dès que $E_0 \gg \frac{M_i g}{e}$, soit $E_0 \gg 10^{-7} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

2 En grandeurs complexes, après intégration des équations simplifiées du mouvement, il vient

$$\vec{v}_e = \frac{-eE_0}{im_e\omega} e^{i(\omega t+kz)} \vec{u}_x$$

et
$$\vec{V}_i = \frac{-eE_0}{iM_i\omega} e^{i(\omega t+kz)} \vec{u}_x.$$

Par définition, la densité volumique de courant vaut $\vec{j} = n(-e)\vec{v}_e + ne\vec{V}_i$.

Soit $\vec{j} = \frac{ne^2}{i\omega} \left(\frac{1}{m_e} + \frac{1}{M_i} \right) E_0 e^{i(\omega t+kz)} \vec{u}_x$. Comme $M_i \gg m_e$, il reste
$$\vec{j} = \frac{-ine^2}{m\omega} \vec{E}.$$

3 Équations de Maxwell dans le plasma :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0 & \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

4 On a
$$\begin{cases} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = -\Delta \vec{E} \\ \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu_0 \frac{ine^2}{m\omega} \vec{E} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{cases}.$$

D'où l'équation de propagation dans le plasma :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - i \frac{\mu_0 ne^2}{m\omega} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

5 Relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}.$$

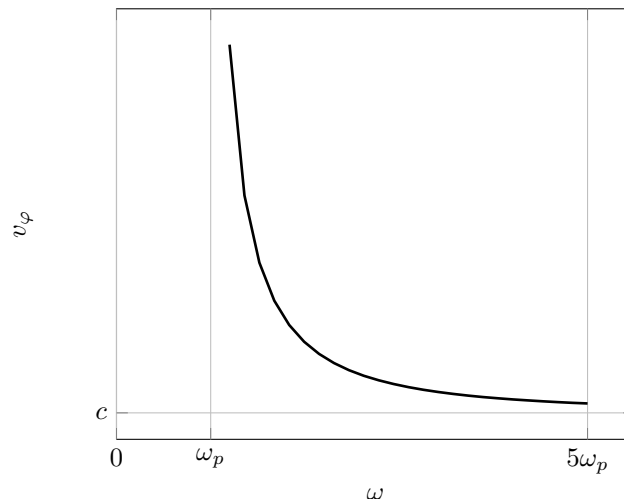
6 Il y a propagation si k est réel. Cela impose $\omega > \omega_p$. Le plasma se comporte donc comme un filtre passe-haut de pulsation de coupure ω_p .

La fréquence de coupure vaut alors
$$f_c = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \epsilon_0}}.$$

7 Avec k réel, $k = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$ et la vitesse de phase s'écrit
$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}}.$$

Comme la vitesse de phase dépend de ω , le milieu est dispersif.

vitesse de phase



8 A.N. $f_c \approx 1,3 \cdot 10^6$ Hz. Tiens ! l'énoncé a failli proposer la bonne valeur numérique.

9 Pour une densité particulière $n_1 = 25n_0$, $f'_c = 5f_c = 6,5$ MHz. Une plage de fréquences acceptable serait l'intervalle 0,1 – 10 GHz, dans le domaine hyperfréquence. L'intérêt est d'être peu sensible à la variation de la densité particulière et de ne pas être trop perturbé par la dispersion du milieu.

Remarque : dans la partie qui précède, la longueur d'onde est de 5,66 cm. C'est un bon indice pour trouver l'ordre de grandeur des fréquences acceptables.