

Devoir 12 type CCP - Le 15 décembre - 4 heures

PROBLÈME A FORMATION ET STABILITÉ D'UN NUAGE

PROBLÈME B LA FOUDRE

B.1- Étude d'un condensateur sphérique**Q1 -**

- Tout plan contenant l'axe OM est plan de symétrie pour la distribution des charges. Le champ électrique est donc porté par l'axe OM .
- Il y a invariance de la distribution par toute rotation d'angle θ et φ . $E(r, \theta, \varphi)$ doit donc être indépendant de θ et φ .

Q2 -

- On choisit comme surface de Gauss, vue la symétrie sphérique, une sphère de centre O et de rayon r (passant donc par M)
- $\Phi = \oiint E(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r = E(r) \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2$
- Pour $R_1 < r < R_2$ (entre les armatures), $Q_{int} = +Q$
- Le théorème de Gauss donne donc $E(r) \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$

Soit
$$\vec{E} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \vec{e}_r$$

Q3 - La distribution étant statique, $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$. Or $\int \overrightarrow{\text{grad}}V \cdot \vec{dl} = \int dV$ donc $\int dV = -\int \vec{E} \cdot \vec{dl}$

On intègre alors entre les deux armatures : $\int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} dr$, soit
$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Q4 - On définit la capacité d'un condensateur telle que $u_c = V_1 - V_2 = \frac{Q}{C}$. Par identification :
$$C = \frac{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$$

Q5 - Vu la symétrie de la distribution, les lignes de courant seront radiales, dirigées vers l'extérieur (de la charge $+Q$ vers la charge $-Q$)

B.2- Analyse du préambule

En vous appuyant sur le texte fourni en préambule, répondre aux six questions suivantes :

Q6 - On reprend la relation obtenue $C = \frac{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{1}{6370} - \frac{1}{6370+80} \right)} \simeq 57 \text{ mF}$

Q7 - Le champ électrique n'est pas uniforme théoriquement. Cependant afin d'évaluer l'énergie stockée, on considèrera sa valeur moyenne entre les plaques. On se place par beau temps, alors $E \simeq 110 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, ce qui donne $V_1 - V_2 \simeq E \cdot (R_2 - R_1) = 8,8 \text{ MV}$. alors $W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot (V_1 - V_2)^2 = 220 \text{ GJ}$

Q8 - Le sens du champ électrique s'inverse car les charges s'inversent selon le temps calme ou orageux.

Q9 -

- L'éclair correspond au claquage électrique entre les nuages. La foudre correspond au claquage électrique entre un nuage et la Terre
- Cela dépend des charges mises en jeu.

Q10 - Il s'agit alors d'un champ de 20 kV.m^{-1} sur une épaisseur de 2000 m , soit une différence de potentiel $U = 20.10^3.2000 = 40 \text{ MV}$

Q11 - La puissance est alors $\mathcal{P} = U.I$, ce qui donne une énergie $W = U.I.\tau = 20 \text{ GJ}$.

Il s'agit d'une énergie assez faible (par rapport aux énergies fournies par les centrales existantes) et très complexe à récupérer. Ce n'est donc pas à priori une source exploitable.

B.3- Coup de foudre sur une ligne électrique

Aspect dynamique

Q12 -

- Loi des nœuds : $i(x, t) = i(x + dx, t) + c.dx.\frac{\partial v(x + dx, t)}{\partial t}$ soit $\boxed{\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} + c.\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = 0}$

- Loi des mailles : $v(x, t) - l.dx.\frac{\partial i(x, t)}{\partial t} - v(x + dx, t) = 0$ soit $\boxed{\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + l.\frac{\partial i(x, t)}{\partial t} = 0}$

- Avec $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} + c.\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right) = 0$ et $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + l.\frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \right) = 0$, on obtient

$$\boxed{\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} - l.c.\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = 0} \quad \text{Q13 - La célérité associée à l'équation obtenue est } c = \frac{1}{\sqrt{l.c}} = 2,6.10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

Q14 - La propagation peut avoir lieu pendant une durée de 10 millisecondes, soit $d = \frac{\Delta t}{d} = 2600 \text{ km}$

Aspect thermique

Q15 - On observe une longueur L de ligne. On considère que toute cette énergie thermique participe à l'augmentation de l'énergie interne de la ligne (pas de déperdition vers l'extérieur).

Q16 -

- La puissance dissipée par effet Joule s'écrit $\mathcal{P}_J = r.I^2$ avec $r = \frac{L}{\gamma.\pi.R^2}$. γ est la conductivité électrique de la ligne.

- En notant c la capacité thermique massique de la ligne et ρ sa masse volumique, on obtient donc $\Delta U = c.L.\pi.R^2.\rho.\Delta T = \frac{L}{\gamma.\pi.R^2}.I^2.\tau$

Soit $\boxed{\Delta T = \frac{I^2.\tau}{\gamma.\rho.\pi^2.R^4}}$

B.4- Protection contre la foudre et prise de terre

Q17 - La loi de conservation de la charge s'écrit $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$, soit en régime permanent $\text{div } \vec{j} = 0$ ou $\oint \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$. On doit donc vérifier la conservation du flux pour le vecteur densité de courant.

- Le flux entrant s'écrit $\Phi_e = I$

- Le flux sortant à travers une hémisphère de rayon r s'écrit $\Phi_s = \iint j(r)\vec{e}_r \cdot dS\vec{e}_r = j(r).2.\pi.r^2$

- La conservation du flux impose $I = j(r).2.\pi.r^2$

Q18 - La loi d'Ohm locale donne $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma_{sol}} = \frac{I}{2.\pi.r^2.\gamma_{sol}}.\vec{e}_r$

En statique, $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ soit $dV = -\vec{E}.\vec{dl}$ donc $\int_0^{V(r)} = -\int_\infty^r \frac{I}{2.\pi.r^2.\gamma_{sol}}.dr$. Donc $V(r) = \frac{I}{2.\pi.r.\gamma_{sol}}$

Q19 - Les deux pieds peuvent être considérés dans la situation la plus dangereuse aux distances $r = D$ et $r = D - a$, on a alors entre les pieds une différence de potentiels :

$\Delta V = \frac{I}{2.\pi.\gamma_{sol}}.\left(\frac{1}{D-a} - \frac{1}{D}\right) = \frac{I}{2.\pi.D.\gamma_{sol}}.\left(\frac{1}{1-\frac{a}{D}} - 1\right) \simeq \frac{I}{2.\pi.D.\gamma_{sol}}.\left(1 + \frac{a}{D} - 1\right)$ par un développement limité d'ordre 1 en $\frac{a}{D}$

$$\Delta V = \frac{I.a}{2.\pi.D^2.\gamma_{sol}}$$

Le danger est donc d'autant plus important que l'homme se rapproche de la prise.

Q20 - On a alors $I = j(r).2.\pi.r^2$ et $dV = V(r+dr) - V(r) = -E.dr = -\frac{j(r)}{\gamma}.dr = \frac{I}{\gamma.2.\pi.r^2}dr$. Or on peut définir

la résistance selon la loi d'Ohm : $V(r) - V(r+dr) = dR.I$, ce qui donne $dR = \frac{dr}{\gamma.2.\pi.r^2}$

Par intégration on obtient alors $R = \frac{1}{\gamma.2.\pi}.\left(\frac{1}{R_{int}} - \frac{1}{R_{ext}}\right)$

Q21 - On a donc $R_{metal} = \frac{1}{\gamma_{metal}.2.\pi}.\left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b}\right)$ et $R_{sol} = \frac{1}{\gamma_{sol}.2.\pi}.\left(\frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_\infty}\right)$. Ces deux résistances sont

associées en série. Donc

$$R_{glob} = \frac{1}{\gamma_{metal}.2.\pi}.\left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b}\right) + \frac{1}{\gamma_{sol}.2.\pi.R_b} = 47 \Omega$$

La législation n'est pas respectée. On pourra augmenter R_b afin de répondre aux critères.

PROBLÈME C LE GRAVIMÈTRE À CHUTE LIBRE

C.1- Étude de l'interféromètre de Michelson

Q22 - Elle permet à chaque rayon de traverser un même nombre de fois une lame d'indice n et d'épaisseur e afin que le dispositif de division d'amplitude n'engendre pas de différence de marche.

Q23 - L'ensemble peut être modélisé par deux sources secondaires S_1 et S_2 positionnées sur l'axe de la lentille. Cet axe constitue donc un axe d'invariance par rotation pour le système. Les conséquences ayant au moins les symétries de la cause, la figure d'interférence sur l'écran aura donc cette invariance :

On obtient des cercles (ou franges d'égale inclinaison)

La source étant étendue, les franges sont localisées à l'infini

On doit donc placer l'écran dans le plan focal image de la lentille

La figure aura donc des dimensions proportionnelles à la distance focale de la lentille.

Q24 - On a alors la différence de marche $\delta = 2.e$. Pour un phénomène d'interférences à deux ondes, on obtient l'intensité en un point M :

$$I(m) = 2.I_0 \cdot \left(1 + \cos \frac{2\pi \cdot \delta}{\lambda_0}\right) \text{ soit } I(m) = 2.I_0 \cdot [1 + \cos(4\pi \cdot e \cdot \sigma_0)]$$

C.2- Interférogramme en lumière blanche

Q25 -
 $\lambda_2 = 400 \text{ nm}$ et $\lambda_1 = 750 \text{ nm}$

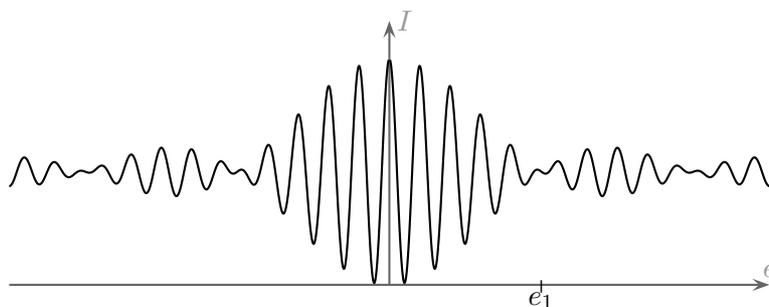
Q26 -
 Il y aura brouillage du au caractère non monochromatique de la source

Q27 -
 On aura brouillage si les ordres d'interférences associés aux longueurs d'onde λ_2 et $\lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ sont tels que $|p_2 - p_0| > \frac{1}{2}$

Or $p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2.e}{\lambda}$, on trouve donc la valeur limite de e :

$$2.e_1 \cdot \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Soit } e_1 = \frac{1}{4 \cdot \left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_2}\right)}$$



C.3- Le gravimètre absolu balistique

Q28 -

Q29 -

$$\text{plan } z = z_p \quad \Delta t_{inf} = \sqrt{\frac{4.v_0^2}{g^2} + \frac{8}{g}(z_0 - z_p)}$$

$$\text{plan } z = z_p + h \quad \Delta t_{sup} = \sqrt{\frac{4.v_0^2}{g^2} + \frac{8}{g}(z_0 - z_p - h)}$$

Soit $\Delta t_{sup}^2 - \Delta t_{inf}^2 = \frac{8}{g} \cdot h$

Ce qui donne l'expression de g : $g = \frac{8 \cdot h}{\Delta t_{sup}^2 - \Delta t_{inf}^2}$

Q30 -

On choisit une base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ selon les trois arrêtes du réflecteur.

SI on caractérise le sens de propagation des rayon par le vecteur d'onde, on a alors $\vec{k}_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \xrightarrow{M_1} \vec{k}_2 \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \\ \gamma \end{pmatrix} \xrightarrow{M_2}$

$\vec{k}_3 \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \\ -\gamma \end{pmatrix} \xrightarrow{M_3} \vec{k}_4 \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \\ -\gamma \end{pmatrix}$

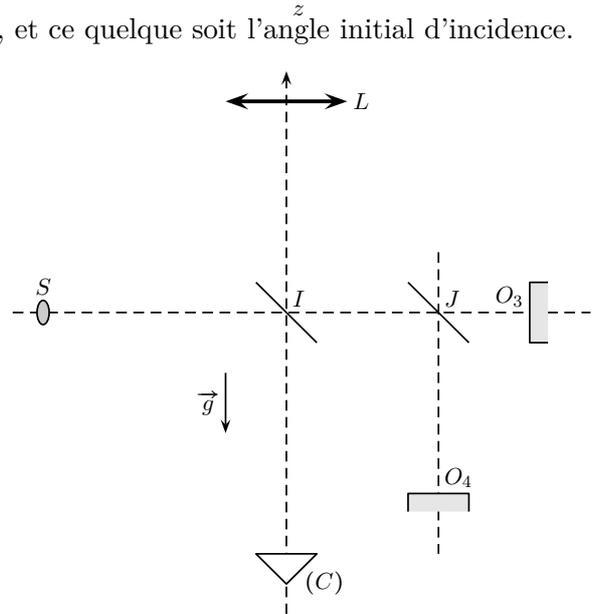
Le rayon ressort donc dans un sens opposé au rayon incident, et ce quelque soit l'angle initial d'incidence.

Q31 -

L'intensité en M correspondra à la superposition des intensité dues aux interférences avec les rayons passant par O_3 et (C) d'une part et O_4 et (C) d'autre part.

Or on a vu que le maximum d'intensité pour ces interférences était obtenu pour une différence de marche nulle soit si (IC) est égal à (IJO_3) ou à (IJO_4)

Cela correspond donc au passage du réflecteur au niveau de deux plans distants de $h = d$. On obtient donc :



Q32 -

Q33 -

L'intérêt de la source de lumière blanche est sa très faible longueur de cohérence qui permet de détecter très précisément les contacts optiques.

Q34 - On assimile la terre à une sphère de rayon R_T créant en un point de l'espace un champ de gravitation :

$\vec{\alpha} = -\frac{G \cdot M_T}{(R_T + h)^2} \vec{u}_r = -\frac{G \cdot M_T}{R_T^2} \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2} \cdot \vec{u}_r$