CORRECTION CCP TSI 2010

Anne-Marie Beninger (TSI2 Marseille) , Anne Gaulier (TSI2 Montbéliard)

Premier problème : propagation d'ondes électromagnétiques

Première partie : propagation dans le vide

1. On se place dans un milieu non chargé et non conducteur : ρ = 0, $\vec{j} = \vec{0}$
Les équations de Maxwell deviennent :

$$\begin{cases} \mathrm{div}(\vec{B}) = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -(\partial\vec{B}/\partial t)_M \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathrm{div}(\vec{E}) = \rho/\varepsilon_0 = 0 \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0(\vec{j} + \varepsilon_0(\partial\vec{E}/\partial t)_M) = \mu_0\varepsilon_0(\partial\vec{E}/\partial t)_M \end{cases}$$

En utilisant la formule d'analyse vectorielle : $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{E})) = -\Delta\vec{E} + \overrightarrow{grad}(div\vec{E})$
On obtient : $\overrightarrow{rot}(-(\partial\vec{B}/\partial t) = -(\partial\overrightarrow{rot}(\vec{B})/\partial t) = -\mu_0\varepsilon_0(\partial^2\vec{E}/\partial t^2) = -\Delta\vec{E}$
Le champ électrique vérifie l'équation de propagation $\boxed{\Delta\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0(\partial^2\vec{E}/\partial t^2)}$
$\vec{B}$ vérifie la même équation que $\vec{E}$: $\boxed{\Delta\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\,(\partial^2\vec{B}/\partial t^2)}$

2. Une onde est dite plane si, à un instant t, l'ensemble des points M tels que $\vec{E}$(M,t) et $\vec{B}$(M,t) sont constants, forment des plans.

3.1 $\vec{E}$(M,t) a la même expression à l'instant t, en tout point M du plan z = cte : il s'agit bien du champ d'une onde plane se propageant selon z'z dans le sens des z croissants.
En remplaçant dans l'équation de propagation projetée sur Ox , on obtient : $\varepsilon_0.\mu_0.c^2 = 1$

3.2 L'onde est une onde plane **progressive :** $\vec{B} = (1/c)\,\overrightarrow{e_z} \wedge \vec{E}$ = $(E_0/c)\cos\omega(t-z/c)\,\overrightarrow{e_y}$

4.1 Vecteur de Poynting : $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \vec{B} / \mu_0$. La puissance rayonnée par l'onde à travers une surface S est égale au flux du vecteur de Poynting à travers cette surface.
Π s'exprime en $W.m^{-2}$.

4.2 $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \vec{B} / \mu_0 = \left(\frac{E_0^2}{\mu_0 c}\right) cos^2(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right))\overrightarrow{e_z}$
$<\vec{\Pi}> = \left(\frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\right)\overrightarrow{e_z} = (\varepsilon_0 E_0^2 c/2)\,\overrightarrow{e_z}$

5. P = <Π> S d'où $E_0 = \sqrt{2P/\varepsilon_0 cS}$

6. L'antenne doit être parallèle au champ électrique, ici parallèle à x'x : le champ électrique met ainsi en mouvement les électrons du métal grâce à la force de Lorentz créant un courant d'intensité de même fréquence.

7. 1 $\Phi = \iint_{cadre} \vec{B}\,.\overrightarrow{d^2S} = \iint_{cadre} \frac{(E_0}{c}) \cos\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) dxdz$
$\Phi = (2E_0 a/\omega)\sin(\omega a/2c)\cos(\omega(t-(z_0+a/2)/c))$
Loi de Faraday : $e = -d\Phi/dt = 2E_0\,a\sin(\omega a/2c)\sin(\omega(t-(z_0+a/2)/c))$

7.2 $U_{eff} = \sqrt{2}\,E_0\,a\,|\sin(\omega a/2c)|$

8. L'amplitude de e est maximale quand $|\sin(\omega a/2c)|=1$ donc $\omega_{max} = (2n+1)\pi a/c$ (n entier)
Elle est nulle quand $|\sin(\omega a/2c)|=0$ donc $\omega_{min} = 2n\pi a/c$ (n entier)

Deuxième partie : réflexion sur un miroir métallique parfaitement conducteur

9.1 Conditions aux limites :

$\overrightarrow{E_{métal}}(z=0^+) - \overrightarrow{E_{vide}}(z=0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{e_z}$ d'où

$\overrightarrow{E_{vide}}(z=0^-) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{e_z}$ (σ densité surfacique de charge)

$\overrightarrow{B_{métal}}(z=0^+) - \overrightarrow{B_{vide}}(z=0^-) = \mu_0 \overrightarrow{\iota_s} \wedge \overrightarrow{u_z}$ d'où

$\overrightarrow{B_{vide}}(z=0^-) = -\mu_0 \overrightarrow{\iota_s} \wedge \overrightarrow{u_z}$ ($\overrightarrow{\iota_s}$ densité surfacique de courant)

D'après les conditions en limite en z = 0 : $E_0 \cos \omega t + E_{0r} \cos \omega t = 0$

D'où $E_{0r} = - E_0$.

9.2 $\overrightarrow{E_{tot}} = 2\, E_0 \sin(\omega z/c) \sin(\omega t)\, \overrightarrow{e_x}$: il s'agit du champ d'une onde stationnaire.

10. L'onde incidente est une onde plane progressive donc

$\overrightarrow{B_\iota} = (1/c)\, \overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{E_\iota} = (E_0/c) \cos\omega(t-z/c)\, \overrightarrow{e_y}$

L'onde réfléchie est une onde plane progressive donc

$\overrightarrow{B_r} = (1/c)(-\overrightarrow{e_z}) \wedge \overrightarrow{E_r} = (E_0/c) \cos\omega(t+z/c)\, \overrightarrow{e_y}$

$\overrightarrow{B_{tot}} = 2(E_0/c) \cos(\omega z/c) \cos(\omega t)\, \overrightarrow{e_y}$

11. $\vec{\Pi} = \overrightarrow{E_{tot}} \wedge \overrightarrow{B_{tot}} / \mu_0 = 4(E_0^2/c) \sin(\omega z/c) \sin(\omega t) \cos(\omega z/c) \cos(\omega t)\, \overrightarrow{e_z}$

$< \vec{\Pi} > = \vec{0}$: il n'y a pas de propagation de l'énergie en moyenne pour cette onde stationnaire.

Troisième partie : onde stationnaire entre deux plans conducteurs

12. Onde plane : $\vec{E}$(M,t) a la même expression à l'instant t, en tout point M du plan z = cte

Onde stationnaire : E_x est le produit d'une fonction de z par une fonction de t.

13. D'après les conditions aux limites de la question 9.1, la composante tangentielle du champ électrique dans le vide doit être nulle pour $z = 0^+$ et $z = a^-$. On en déduit $f(0^+) = 0 = f(a^-)$.

14. En projetant l'équation de propagation sur Ox : $\Delta E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = (1/c^2)\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$

La fonction f vérifie l'équation différentielle : $f'' + (\omega/c)^2 f = 0$

15. Les solutions de l'équation différentielle précédente s'écrivent :

$f(z) = A \sin(\omega z/c) + B \cos(\omega z/c)$

$f(0^+) = 0$ donc $B = 0$ donc $f(z) = A \sin(\omega z/c)$

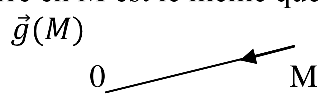
$f(a^-) = 0$ donc $\sin(\omega a/c) = 0$ soit $\omega = n\,\pi\, c/a$ (n entier)

Deuxième problème : Attraction gravitationnelle

Préliminaire :

1. Le champ gravitationnel créé par la Terre en M est le même que celui d'une masse ponctuelle M_T placée en O donc :

$\vec{g}(M) = -\left(\frac{GM_T}{r^2}\right)\overrightarrow{e_r}$



Concours CCP 2009 option PC Physique 2 Problème II

Francis BROUCHIER

12 mai 2009

Les figures de l'énoncé étant suffisamment claires ne seront pas reproduites dans le corrigé. Le lecteur est prié de garder l'énoncé sous les yeux.

1 Modélisation d'une ligne électrique composée de résistances réparties uniformément

1.1

Au point M on écrit que la somme algébrique des courants y arrivant est nulle :

$$\frac{V(x-dx)-V(x)}{rdx}+\frac{V(x+dx)-V(x)}{rdx}+(0-V(x))gdx=0$$

En utilisant la formule de Taylor au second ordre il vient :

$$\frac{V(x)-dx\frac{dV}{dx}+\frac{(dx)^2}{2}\frac{d^2V}{dx^2}-V(x)}{rdx}+\frac{V(x)+dx\frac{dV}{dx}+\frac{(dx)^2}{2}\frac{d^2V}{dx^2}-V(x)}{rdx}-V(x)gdx=0$$

En simplifiant il reste :

$$\boxed{\frac{d^2V}{dx^2}-rgV=0}$$

1.2

Cette équation différentielle est du type : $\frac{d^2V}{dx^2}-\alpha^2V=0$ on en déduit $\boxed{\alpha=\sqrt{rg}}$.

1.3

Comme la ligne n'est formée que de résistances elle dissipe de la puissance sous forme de chaleur. Si elle est infiniment longue il ne reste plus de tension au bout donc $V(x\to\infty)=0$. Le coefficient de l'exponentielle en $+\alpha x$ doit donc être nul : $\boxed{A=0}$. Si au bout de la ligne la tension est nulle la valeur de R_L n'intervient pas dans ce résultat.

2 Modélisation d'une ligne électrique infinie composée de résistances longitudinales et de capacités transverses réparties uniformément.

2.1

l'impédance complexe d'un condensateur de capacité γdx est $\boxed{1/i\gamma dx\omega}$. gdx est une conductance (inverse d'une résistance), son analogue en amplitude complexe est une admittance (inverse d'une impédance). g est donc analogue à $i\gamma\omega$. En remplaçant l'équation différentielle demandée est :

$$\boxed{\frac{d^2\underline{V(x)}}{dx^2}-ir\gamma\omega\underline{V(x)}=0}$$

2.2

Comme la ligne est infiniment longue la solution en exponentielle à exposant positif est nulle il ne reste que $\underline{V(x)} = \hat{V} e^{-i\underline{k}x}$ avec $\underline{k}^2 = ir\gamma\omega = r\gamma\omega\frac{(1+i)^2}{2}$ de sorte que :

$$\boxed{\underline{k} = \sqrt{\frac{r\gamma\omega}{2}}(1+i)}$$

Cette relation est appelée "relation de dispersion".

2.3

En multipliant la solution en $\underline{V(x)}$ par l'exponentielle en $i\omega t$ on obtient :

$$\underline{v}(x,t) = \hat{V} e^{i[\omega t - \sqrt{\frac{r\gamma\omega}{2}}(1+i)x]} = \hat{V} e^{-\sqrt{\frac{r\gamma\omega}{2}}x} * e^{i\omega(t - \sqrt{\frac{r\gamma}{2\omega}}x)}$$

Le terme en exponentielle imaginaire est le terme de propagation et le terme en exponentielle réelle à exposant négatif est le terme d'atténuation de l'amplitude de l'onde. Soit $x = \delta$ la distance à laquelle l'amplitude vaut $1/e$ de l'amplitude initiale, on écrit :

$$\frac{1}{e} = e^{-\sqrt{\frac{r\gamma\omega}{2}}\delta} \qquad \boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{r\gamma\omega}}}$$

La vitesse de phase v_φ apparaît dans le terme en exponentielle imaginaire sous la forme $e^{i\omega[t - \frac{x}{v_\varphi}]}$ d'où :

$$\boxed{v_\varphi = \sqrt{\frac{2\omega}{r\gamma}}}$$

En posant $a = 1/r\gamma$ appelée "diffusivité" on obtient :

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2a}{\omega}} \qquad v_\varphi = \sqrt{2a\omega}}$$

3 Propagation de la chaleur dans le sol.

3.1

Le problème est formellement régi par la même équation différentielle qu'à la section précédente. Les notations ont le bon goût d'utiliser les mêmes lettres pour désigner des grandeurs physiques différentes. Par analogie on en déduit :

$$\boxed{\underline{\theta}(x,t) = \overset{\wedge}{\Theta} e^{-\frac{x}{\delta}} * e^{i[\omega(t - \frac{x}{v_\varphi})]}}$$

3.2

Pour les variations diurnes la période de la variation est $T = 86400\ s$. La pulsation correspondante vaut $\omega_d = 7,27.10^{-5}\ rad.s^{-1}$. Soit p la profondeur pour laquelle l'amplitude de la température est réduite à 1 % de la valeur en surface, on a :

$$\frac{\overset{\wedge}{\Theta}}{100} = \overset{\wedge}{\Theta} e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}p}$$

il vient alors $p = \ln(100).\sqrt{2a}/\sqrt{\omega}$. Ou, numériquement, $p = 3,85.10^{-3}/\sqrt{\omega}$. De même $v_\varphi = \sqrt{2a\omega} = 8,37.10^{-4}\sqrt{\omega}$.

Pour les variations diurnes : $\boxed{p = 45\ cm \qquad v_\varphi = 0,6\ cm/jour}$ Pour les variations annuelles la période est 365 fois plus grande donc le ω_a est 365 fois plus petit et sa racine carrée est 19,1 fois plus petite. On a donc : $\boxed{p = 857\ cm \qquad v_\varphi = 0,03\ cm/jour}$.

4 Transport industriel de la chaleur.

4.1

En régime stationnaire on a la formule :$\Phi = (\theta_i - \theta_f)/R_{th}$, soit $\theta_i - \theta_f = R_{th}.\Phi$. Si la ligne a une longueur de 100 m sa résistance thermique est de $R_{th} = 30\ K/W$. D'où $\theta_i = \theta_f + 30 * 10^4 = 300080°C$.
Il n'est pas raisonnable d'envisager un tel moyen de transport pour la chaleur car la source de chaleur devrait être à une température de l'ordre de grandeur de celle du Soleil.
Le transfert de chaleur sur de courtes distances et pour des puissances ne dépassant pas le kW est utilisé, entre autre, pour refroidir les circuits électroniques de puissance : amplificateurs ou microprocesseurs. Souvent ce transfert s'accompagne d'une convection par ventilateur : dans les unités centrales d'ordinateur le microprocesseur est muni d'un radiateur et d'un ventilateur. Il en est de même pour les amplificateurs B.F. de sonorisation.

4.2

4.2.1

D_m est le débit massique de la conduite.

4.2.2

Le débit massique est le produit du débit volumique D_v par la masse volumique ρ de sorte que

$$\boxed{G = D_m.c = \rho.c.D_v}$$

4.2.3

Au point de température $\theta(x)$ arrive le flux $\Phi(x - dx)$ et repart le flux $\Phi(x)$ et le flux de fuite vers l'extérieur $(\theta(x) - \theta_{ext})gdx$. En ce nœud la somme algébrique des flux est nulle d'où :

$$G[\theta(x - dx) - \theta(x)] + [\theta_{ext} - \theta(x)]gdx = 0$$

En développant $\theta(x - dx) = \theta(x) - \frac{d\theta}{dx}dx$ il vient, après simplification :

$$\boxed{\frac{d\theta}{dx} + \frac{g}{G}.\theta(x) = \frac{g}{G}.\theta_{ext}}$$

4.2.4

Cette équation différentielle est du premier ordre à coefficient constant avec second membre, sa solution générale est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'un solution particulière de l'équation avec second membre. On peut alors écrire :

$$\theta(x) = Ae^{-\frac{g}{G}x} + \theta_{ext} \qquad x = 0 \quad \theta(0) = \theta_0 \Leftrightarrow \theta(x) - \theta_{ext} = [\theta_0 - \theta_{ext}]e^{-\frac{g}{G}x}$$

d'où on tire la valeur de l'écart relatif :

$$\boxed{e_r = \frac{\theta(x) - \theta_{ext}}{\theta_0 - \theta_{ext}} = e^{-\frac{g}{G}x}}$$

4.2.5 *Application numérique :*

Il faut d'abord passer en unités légales : $D_v = 360\ litres/heure = 10^{-4}\ m^3/s$
a) $\theta_0 = 90\ °C \quad \theta_1 = 89\ °\ C\ g/G = 9,57.10^{-4}$

$$\frac{84}{85} = e^{-9,57.10^{-4}x_1} \quad \leftrightarrow x_1 = \frac{1}{9,57.10^{-4}} \ln\frac{85}{84} \quad \leftrightarrow \boxed{x_1 = 12,4\ m}$$

b) Avec $L = 100\ m$ on a $\theta_L - 5 = 85.e^{-9,57.10^{-2}}$ $\boxed{82,3\ °\ C}$